Savoir CALCULER AVEC DES PUISSANCES

Ce que je dois savoir

- Lorsqu'on écrit une puissance a^n, on dit que n est l'**exposant** et a est la **base**.
- **Les formules avec une seule base et plusieurs exposants**
  - $a^m \times a^n = a^{m+n}$ • $\dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$ • $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ • $(a^m)^n = a^{m\times n}$

  Remarque : On peut généraliser certaines formules :
  - $a^m \times a^n \times a^p = a^{m+n+p}$ • $((a^m)^n)^p = a^{m\times n\times p}$

  Remarque : On peut inverser certaines formules :
  - $\dfrac{1}{a^{-n}} = a^n$ • $\dfrac{a^m}{a^n} = \dfrac{1}{a^{n-m}}$
- **Les formules avec un seul exposant et plusieurs bases**
  - $(a\times b)^n = a^n \times b^n$ • $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ ⚠ Pas de formule simple avec $(a+b)^n$ et $(a-b)^n$ …

  Remarque : On peut généraliser la première formule : • $(a\times b\times c)^n = a^n \times b^n \times c^n$

Ce que je dois savoir faire

- **Calculer la valeur d'une puissance numérique**
  - Les grosses puissances s'obtiennent à la calculatrice.
  - Certaines puissances se connaissent, se reconnaissent ou se calculent de tête :
    - les puissances d'exposants 0 ou 1 : on a $a^0 = 1$ et $a^1 = a$ pour toute base a.
    - les carrés : de $0^2 = 0$ à $10^2 = 100$, puis $11^2 = 121$; $12^2 = 144$; $13^2 = 169$; $14^2 = 196$ et $15^2 = 225$.
    - les cubes : $0^3 = 0$; $1^3 = 1$; $2^3 = 8$; $3^3 = 27$; $4^3 = 64$; $5^3 = 125$.
    - les puissances de 0 ou 1 : on a $0^n = 0$ et $1^n = 1$ pour tout exposant entier n (sauf $0^0 = 1$)
    - les puissances de 2 : … ; $2^4 = 16$; $2^5 = 32$; $2^6 = 64$; $2^7 = 128$; $2^8 = 256$; $2^9 = 512$; $2^{10} = 1\,024$.
  - On en déduit les puissances de négatifs.

    ⚠ Ne pas confondre $\begin{cases}(-5)^2 = 25 \text{ car le carré concerne le } - \text{ donc c'est } (-5)\times(-5) \text{ positif}\\ -5^2 = -25 \text{ car le carré ne concerne pas le } - \text{ donc c'est } -5\times 5 \text{ négatif}\end{cases}$

    Mais $\begin{cases}(-5)^3 = -125 \text{ car c'est } (-5)\times(-5)\times(-5) \text{ et donc négatif}\\ -5^3 = -125 \text{ car c'est } -5\times 5\times 5 \text{ et donc négatif}\end{cases}$
- **Simplifier une écriture contenant des puissances**
  - Si on a une seule base, on utilise les 1ères formules pour regrouper en un seul a^n.
  - Si on a plusieurs bases, c'est le plus délicat…

    On utilise les 2èmes formules, mais souvent dans les deux sens !

    Par exemple, $(a\times b)^n = a^n \times b^n$ peut servir :
    - de gauche à droite pour **décomposer** 15^3 en $3^3\times 5^3$ pour éviter un gros nombre ;
    - de droite à gauche pour **réduire** $2^3\times 5^3$ en 10^3 qui se calcule facilement.

    Les 1ères formules servent aussi, et dans les deux sens.

    Par exemple, $a^m \times a^n = a^{m+n}$ peut servir de droite à gauche pour **décomposer** 5^6 en $5^2\times 5^4$ si besoin.

  Remarque : Pour une écriture numérique, la simplification peut permettre de calculer la valeur numérique finale.
  Pour une écriture littérale, on ne pourra pas calculer la valeur numérique finale.

Remarques sur les exercices :

- L'exercice ① est purement numérique.
- Les exercices ② et ③ utilisent les mêmes formules mais en calcul littéral.
- L'exercice ④ est un problème d'approfondissement.

① **1.** Calculer (sans calculatrice) sous la forme d'un entier ou d'une fraction irréductible :

$A = 2^3$; $B = (-3)^3$; $C = 5^3$; $D = (-2)^{10}$; $E = 83^1$; $F = 17^0$; $G = 5^{-2}$; $H = (-3)^{-1}$; $I = \frac{1}{3^{-3}}$;

$J = 10^7$; $K = 3^2 + 7^2$; $L = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4$; $M = 2^2 + 2^{-2}$; $N = 11^2 - 1^2$

2. Utiliser les formules pour simplifier l'écriture sous la forme d'une puissance a^n à une base et un exposant :

$A = 5^3 \times 5^7$; $B = 3^5 \times 3 \times 3^3$; $C = \frac{7^{12}}{7^3}$; $D = \frac{5^5 \times 5^8}{5^2 \times 5^3}$; $E = \frac{1}{7^8}$; $F = \frac{13^5}{13^7}$; $G = 2^7 \times 2^{-10} \times 2^2$;

$H = (2^3)^3$; $I = \left(\frac{1}{5^2}\right)^5$; $J = \frac{11^{-3} \times 11^5}{11^{10} \times 11^{-2}}$; $K = \frac{7 \times 7^2 \times (7^{-2})^2}{(7^2)^6 \times 7^{-12}}$

3. Simplifier les écritures pour pouvoir calculer sous la forme d'un entier ou d'une fraction irréductible :

$A = 5^6 \times 2^6$; $B = 5^6 \times 2^7$; $C = 5^{11} \times 2^9$; $D = \frac{15^3}{5^3}$; $E = \frac{15^3}{5^4}$; $F = \frac{26^2}{39^2}$; $G = \frac{15^3}{6^3}$;

$H = \frac{10^7}{5^4}$; $I = \frac{((7^2)^5)^7}{((7^7)^2)^5}$; $J = 21^3 \times 14^{-3}$; $K = \frac{15^3 \times 4^5}{27 \times 1\,000}$; $L = 2^{35} \times 0{,}5^{36}$

---

② Simplifier les écritures littérales suivantes :

$A = (2m)^3 \times (3n)^2$; $B = (-y)^2$; $C = (-y)^3$; $D = (-x)^2 \times x^4 \times (-x)^3$; $E = \frac{b^2}{a^3} \times \frac{a^2}{b^3} \times \frac{b}{a}$; $F = \frac{(2a)^5 \times a^{11}}{(2a^2)^4}$;

$G = \frac{(a^3 b^5)^3}{(a^5 b^7)^2}$; $H = \frac{(a^2 b^2)^3 \times (a^3 b)^5}{a^6 \times (a^3 b^2)^6 \times b}$.

---

③ n et k désignent des nombres entiers positifs.
Simplifier les écritures :

1. $A = \frac{5^{n+2}}{5^n}$; $B = \frac{7^{k-1}}{7^{k+1}}$; $C = \frac{3^{2n}}{3^n}$; $D = \frac{10^{2k+3}}{10^{2k-5}}$; $E = \frac{5^{n-1} \times 3^n}{3^{n+2} \times 5^{n-2}}$; $F = \frac{2^{2n+1} \times 2^n}{2^{3n}}$

2. $G = \frac{2^3 \times (2^n)^2}{2^{1+2n}}$; $H = \frac{10^{m+n}}{2^m \times 5^n}$; $I = \frac{6^k}{2^{k+1} \times 3^{k+1}}$

---

④ **a.** Calculer et vérifier que 2^{10} est très proche de 10^3.

Dans la suite de l'exercice, on pourra noter : $2^{10} \approx 10^3$.

b. Montrer qu'un milliard est une bonne estimation de 2^{30}.

c. Sans calculer sa valeur, donner une estimation de l'écriture scientifique de 2^{33}.
En déduire le nombre de chiffres qu'il faut utiliser pour écrire ce nombre.

d. Même question avec le nombre 2^{47}.

e. 2^{103} = 10 141 204 801 825 835 211 973 625 643 008.
Montrer sur cet exemple que cette technique de calcul du nombre de chiffres n'est qu'une estimation.

f. Le plus grand nombre premier connu en 2020 a été découvert le 7 décembre 2018 par des chercheurs du GIMPS (*Great Internet Mersenne Prime Search*).
Il s'agit d'un nombre de Mersenne, de la forme $2^n - 1$.
Il vaut $2^{82\,589\,933} - 1$.
Donner une estimation du nombre de chiffres qu'il faut utiliser pour l'écrire.
À raison d'un chiffre par seconde, combien de temps mettrait-on pour l'écrire ?
