Correction de 2de - CALCUL ALGÉBRIQUE - Fiche 2

① **1.**

$A = 2^3 = 8$

$B = (-3)^3 = -27$

$C = 5^3 = 125$

$D = (-2)^{10} = 1\,024$

$E = 83^1 = 83$

$F = 17^0 = 1$ → N'importe quel nombre à la puissance 0 fait 1 .

$G = 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$ → Ayez le réflexe face à un exposant négatif : changez de signe et " changez d'étage " de haut en bas !

$H = 3^{-1} = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3}$

$I = \frac{1}{3^{-3}} = 3^3 = 27$ → Changez de signe et " changez d'étage " de bas en haut !

$J = 10^7 = 10\,000\,000$ → Le plus facile pour la fin...

$K = 3^2 + 7^2 = 9 + 49 = 58$ → Attention, cela ne fait pas 10^2 !

$L = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4$
$= 1 + 2 + 4 + 8 + 16$
$= 31$

$M = 2^2 + 2^{-2} = 4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$

$N = 11^2 - 1^2 = 121 - 1 = 120$ → Attention, cela ne fait pas 10^2 !

2.

$A = 5^3 \times 5^7$ → Je vois $a^m \times a^n$ ...
$= 5^{3+7}$ → ... que je transforme en a^{m+n} .
$= 5^{10}$ → Écriture simplifiée, le résultat n'est pas demandé.

$B = 3^5 \times 3 \times 3^3$ → Je vois $a^m \times a^n \times a^p$ ...
$= 3^{5+1+3}$ → ... que je transforme en a^{m+n+p} . Attention à ne pas oublier l'exposant 1 de 3 .
$= 3^9$

$C = \frac{7^{12}}{7^3}$ → Je vois $\frac{a^m}{a^n}$ ...
$= 7^{12-3}$ → ... que je transforme en a^{m-n} .
$= 7^9$

$D = \frac{5^5 \times 5^8}{5^2 \times 5^3}$
$= \frac{5^{5+8}}{5^{2+3}}$
$= \frac{5^{13}}{5^5}$
$= 5^{13-5}$
$= 5^8$

On pourra aller plus vite :
$D = \frac{5^5 \times 5^8}{5^2 \times 5^3}$
$= 5^{5+8-2-3}$ → Je regroupe tous les exposants d'un coup.
$= 5^8$

$E = \frac{1}{7^8}$
$= 7^{-8}$ → C'est tout ! ☺

$F = \frac{13^5}{13^7}$
$= 13^{5-7}$
$= 13^{-2}$

$G = 2^7 \times 2^{-10} \times 2^2$
$= 2^{7-10+2}$
$= 2^{-1}$

$H = (2^3)^3$ → Je vois $(a^m)^n$ ...
$= 2^{3\times 3}$ → ... que je transforme en $a^{m\times n}$.
$= 2^9$

$I = \left(\frac{1}{5^2}\right)^5$
$= (5^{-2})^5$
$= 5^{-2\times 5}$
$= 5^{-10}$

$J = \dfrac{11^{-3}\times 11^{5}}{11^{10}\times 11^{-2}}$
$= 11^{-3+5-10+2}$
$= 11^{-6}$

$K = \dfrac{7\times 7^{2}\times (7^{-2})^{2}}{(7^{2})^{6}\times 7^{-12}}$
$= \dfrac{7\times 7^{2}\times 7^{-2\times 2}}{7^{2\times 6}\times 7^{-12}}$ → Je calcule d'abord les puissances de puissances.
$= \dfrac{7\times 7^{2}\times 7^{-4}}{7^{12}\times 7^{-12}}$
$= 7^{1+2-4-12+12}$
$= 7^{-1}$

---

3. $A = 5^{6}\times 2^{6}$ → Je vois $a^{n}\times b^{n}$ ...
$= (5\times 2)^{6}$ → ... que je transforme en $(a\times b)^{n}$ ...
$= 10^{6}$ → ... parce que $a\times b$ donne 10 sympathique.
$= 1\,000\,000$

$B = 5^{6}\times 2^{7}$ → C'est la catastrophe !... Pas les mêmes bases, pas les mêmes exposants...

Mais je vois que ce n'est pas loin du calcul précédent...

$= 5^{6}\times 2^{6}\times 2$ → J'utilise $a^{m+n} = a^{m}\times a^{n}$ dans le sens inhabituel pour faire apparaître 2^{6} qui ira bien avec 5^{6}.
$= (5\times 2)^{6}\times 2$ → Je fais comme dans le A.
$= 10^{6}\times 2$
$= 1\,000\,000\times 2$
$= 2\,000\,00$

$C = 5^{11}\times 2^{9}$
$= 5^{2}\times 5^{9}\times 2^{9}$
$= 5^{2}\times (5\times 2)^{9}$
$= 5^{2}\times 10^{9}$
$= 25\times 1\,000\,000\,000$
$= 25\,000\,000\,000$

$D = \dfrac{15^{3}}{5^{3}}$ → Je vois $\dfrac{a^{n}}{b^{n}}$ ...
$= \left(\dfrac{15}{5}\right)^{3}$ → ... que je transforme en $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{n}$ ...
$= 3^{3}$
$= 27$

Autre méthode, moins naturelle mais très jolie et **à retenir** :
$D = \dfrac{15^{3}}{5^{3}}$
$= \dfrac{(5\times 3)^{3}}{5^{3}}$ → Je décompose 15.
$= \dfrac{5^{3}\times 3^{3}}{5^{3}}$ → Je décompose en deux puissances pour simplifier par 5^{3}.
$= 3^{3}$

$E = \dfrac{15^{3}}{5^{4}}$ → Ça ressemble au D.
$= \dfrac{(3\times 5)^{3}}{5^{3+1}}$ → Mais je ne peux pas transformer en $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{n}$ ... La décomposition est la meilleure idée...
$= \dfrac{3^{3}\times 5^{3}}{5^{3}\times 5}$
$= \dfrac{3^{3}}{5}$ → ... pour simplifier par 5^{3}.
$= \dfrac{27}{5}$

$F = \dfrac{26^{2}}{39^{2}}$ → Je vois de grands nombres, je décompose pour y échapper.
$= \dfrac{2^{2}\times 13^{2}}{3^{2}\times 13^{2}}$ → Je saute l'étape $\dfrac{(2\times 13)^{2}}{(3\times 13)^{2}}$.
$= \dfrac{2^{2}}{3^{2}}$ → Je simplifie par 13^{2}.
$= \dfrac{4}{9}$

$G = \dfrac{15^{3}}{6^{3}}$
$= \dfrac{3^{3}\times 5^{3}}{2^{3}\times 3^{3}}$ → Je saute l'étape $\dfrac{(3\times 5)^{3}}{(2\times 3)^{3}}$.
$= \dfrac{5^{3}}{2^{3}}$ → Je simplifie par 3^{3}.
$= \dfrac{125}{8}$

$H = \dfrac{10^7}{5^4}$

$= \dfrac{2^7\times5^7}{5^4}$ → La décomposition me donne un 5^7 qui va en partie se simplifier avec 5^4.

$= \dfrac{2^7\times5^3\times\cancel{5^4}}{\cancel{5^4}}$ → Je décompose le 5^7 pour faire apparaître un 5^4.

$= 2^7\times5^3$ → On se retrouve dans la même situation que le B ou le C.

$= 2^4\times2^3\times5^3$ → Je décompose encore une fois.

$= 16\times10^3$

$= 16\,000$

On peut aussi utiliser a^{m-n} :

$= \dfrac{2^7\times5^7}{5^4}$

$= 2^7\times5^{7-4}$

$= 2^7\times5^3$

$I = \dfrac{((7^2)^5)^7}{((7^7)^2)^5}$ → Il est impressionnant mais en fait très simple...

$= \dfrac{(7^{2\times5})^7}{(7^{7\times2})^5}$ → Je calcule d'abord $(7^2)^5$ et $(7^7)^2$.

$= \dfrac{(7^{10})^7}{(7^{14})^5}$

$= \dfrac{7^{10\times7}}{7^{14\times5}}$ → Puis je calcule $(7^{10})^7$ et $(7^{14})^5$.

$= \dfrac{\cancel{7^{70}}}{\cancel{7^{70}}}$ → 😮 Quelle bonne surprise !

$= 1$

On pouvait même aller beaucoup plus vite :

$I = \dfrac{((7^2)^5)^7}{((7^7)^2)^5}$

$= \dfrac{7^{2\times5\times7}}{7^{7\times2\times5}}$ → Formule $((a^m)^n)^p = a^{m\times n\times p}$ ...

$= 1$ → Car $2\times5\times7$ est égal à $7\times2\times5$.

$J = 21^3\times14^{-3}$

$= \dfrac{21^3}{14^3}$ → Cela ressemble beaucoup au G.

$= \dfrac{3^3\times7^3}{2^3\times7^3}$ → Vraiment beaucoup...

$= \dfrac{3^3}{2^3}$

$= \dfrac{9}{8}$

On pouvait le faire en ligne :

$J = 21^3\times14^{-3}$

$= 3^3\times7^3\times2^{-3}\times7^{-3}$

$= 3^3\times2^{-3}\times7^{3-3}$

$= 3^3\times2^{-3}$ → Car $7^{3-3} = 7^0 = 1$.

$= \dfrac{3^3}{2^3}$

$= \dfrac{9}{8}$

$K = \dfrac{15^3\times4^5}{27\times1\,000}$

$= \dfrac{3^3\times5^3\times2^3\times2^5}{3^3\times10^3}$ → Décomposons, décomposons, décomposons et décomposons.

$= \dfrac{\cancel{3^3}\times\cancel{5^3}\times\cancel{2^3}\times2^5}{\cancel{3^3}\times\cancel{2^3}\times\cancel{5^3}}$ → Encore un petit peu...

$= 2^5$ → ☺

$= 32$

$L = 2^{35}\times0{,}5^{36}$

$= 2^{35}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{36}$ → Parfois, on préfère les fractions !

$= 2^{35}\times\dfrac{1}{2^{36}}$

$= \dfrac{2^{35}}{2^{36}}$

$= \dfrac{\cancel{2^{35}}}{\cancel{2^{35}}\times2}$

$= \dfrac{1}{2}$

Ou en ligne :

$L = 2^{35}\times0{,}5^{36}$

$= 2^{35}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{36}$

$= 2^{35}\times(2^{-1})^{36}$

$= 2^{35}\times2^{-1\times36}$

$= 2^{35}\times2^{-36}$

$= 2^{35-36}$

$= 2^{-1}$

$= \dfrac{1}{2}$

② $A = (2m)^3\times(3n)^2$ → Je vois deux fois $(a\times b)^n$ ...

$= 2^3\times m^3\times3^2\times n^2$ → ... que je transforme deux fois en $a^n\times b^n$.

$= 8\times m^3\times9\times n^2$

$= 72m^3n^2$

$B = (-y)^2$ → C'est encore $(a\times b)^n$ avec -1 qui tient le rôle de a.

$= (-1)^2\times y^2$

$= y^2$ → $(-1)^2$ fait 1. Vous pourrez passer directement à cette étape.

$C = (-y)^3$

$= (-1)^3\times y^3$

$= -y^3$ → $(-1)^3$ fait -1. Vous pourrez passer directement à cette étape.

$D = (-x)^2\times x^4\times(-x)^3$

$= x^2\times x^4\times(-x^3)$

$= -x^{2+4+3}$

$= -x^9$

$E = \frac{b^2}{a^3} \times \frac{a^2}{b^3} \times \frac{b}{a}$

$= \frac{b^2 \times a^2}{a^4 \times b^3}$ → Je réunis les puissances d'une même base.

$= \frac{a^2}{a^4}$

Pour gérer ce $\frac{a^2}{a^4}$, voici trois manières :

1ère manière
En décomposant :
$= \frac{a^2}{a^2 \times a^2}$
$= \frac{1}{a^2}$

2ème manière
Avec a^{m-n} :
$= a^{2-4}$
$= a^{-2}$
$= \frac{1}{a^2}$

3ème manière
Avec $\frac{1}{a^{n-m}}$:
$= \frac{1}{a^{4-2}}$
$= \frac{1}{a^2}$

$F = \frac{(2a)^5 \times a^{11}}{(2a^2)^4}$

$= \frac{2^5 \times a^5 \times a^{11}}{2^4 \times a^{2\times4}}$ → Formule $(a\times b)^n = a^n \times b^n$ et formule $(a^m)^n = a^{m\times n}$.

$= \frac{2\times2^4 \times a^{16}}{2^4 \times a^8}$ → Formule $a^m \times a^n = a^{m+n}$ et même formule dans l'autre sens $a^{m+n} = a^m \times a^n$.

$= 2a^{16-8}$

$= 2a^8$

$G = \frac{(a^3b^5)^3}{(a^5b^7)^2}$

$= \frac{a^{3\times3}b^{5\times3}}{a^{5\times2}b^{7\times2}}$

$= \frac{a^9b^{15}}{a^{10}b^{14}}$

Pour gérer ce $\frac{a^9b^{15}}{a^{10}b^{14}}$, voici trois manières :

1ère manière
En décomposant :
$= \frac{a^9b^{14}}{aa^9b^{14}}$
$= \frac{b}{a}$

2ème manière
Avec a^{m-n} :
$= a^{9-10}b^{15-14}$
$= a^{-1}b^1$
$= \frac{1}{a}b$
$= \frac{b}{a}$

3ème manière
Avec a^{m-n} et $\frac{1}{a^{n-m}}$:
$= \frac{b^{15-14}}{a^{10-9}}$
$= \frac{b}{a}$

$H = \frac{(a^2b^2)^3 \times (a^3b)^5}{a^6 \times (a^3b^2)^6 \times b}$

$= \frac{a^{2\times3}b^{2\times3} \times a^{3\times5}b^5}{a^6 \times a^{3\times6}b^{2\times6} \times b}$

$= \frac{a^6b^6 \times a^{15}b^5}{a^6 \times a^{18}b^{12} \times b}$

$= \frac{a^{15}b^{11}}{a^{18}b^{13}}$

Comme dans le G, plusieurs manière de finir pour trouver $\frac{1}{a^3b^2}$.

---

③ **1.** $A = \frac{5^{n+2}}{5^n}$

$= 5^{n+2-n}$

$= 5^2$

$= 25$

Autre manière, en décomposant : $A = \frac{5^{n+2}}{5^n}$

$= \frac{5^n \times 5^2}{5^n}$

$= 5^2$

$= 25$

$B = \frac{7^{k-1}}{7^{k+1}}$

$= 7^{k-1-(k+1)}$

$= 7^{k-1-k-1}$

$= 7^{-2}$

$= \frac{1}{7^2}$

$= \frac{1}{49}$

Autre manière, en décomposant : $B = \frac{7^{k-1}}{7^{k+1}}$

$= \frac{7^k \times 7^{-1}}{7^k \times 7^1}$

$= \frac{7^{-1}}{7^1}$

$= 7^{-1-1}$

$= 7^{-2}$ etc...

Ou : $= \frac{1}{7^{1+1}}$

$= \frac{1}{7^2}$

$= \frac{1}{49}$

$C = \frac{3^{2n}}{3^n}$

$= 3^{2n-n}$

$= 3^n$

La décomposition est plus difficile à voir : $C = \frac{3^{2n}}{3^n}$

$= \frac{3^{n\times2}}{3^n}$

$= \frac{(3^n)^2}{3^n}$

$= \frac{3^n \times 3^n}{3^n}$

$= 3^n$

$D = \dfrac{10^{2k+3}}{10^{2k-5}}$
$= 10^{2k+3-(2k-5)}$
$= 10^{2k+3-2k+5}$
$= 10^{3+5}$
$= 10^{8}$
$= 100\,000\,000$

Autre manière, en décomposant : $D = \dfrac{10^{2k+3}}{10^{2k-5}} = \dfrac{10^{2k}\times 10^{3}}{10^{2k}\times 10^{-5}} = \dfrac{10^{3}}{10^{-5}} = 10^{3+5}$ etc...

$E = \dfrac{5^{n-1}\times 3^{n}}{3^{n+2}\times 5^{n-2}}$
$= 5^{n-1-(n-2)}\times 3^{n-(n+2)}$
$= 5^{n-1-n+2}\times 3^{n-n-2}$
$= 5^{1}\times 3^{-2}$
$= \dfrac{5}{3^{2}}$
$= \dfrac{5}{9}$

Autre manière, en décomposant : $E = \dfrac{5^{n-1}\times 3^{n}}{3^{n+2}\times 5^{n-2}} = \dfrac{5^{n}\times 5^{-1}\times 3^{n}}{3^{n}\times 3^{2}\times 5^{n}\times 5^{-2}} = \dfrac{5^{-1+2}}{3^{2}} = \dfrac{5}{3^{2}}$ etc...

$F = \dfrac{2^{2n+1}\times 2^{n}}{2^{3n}}$
$= 2^{2n+1+n-3n}$
$= 2^{1}$
$= 2$

Autre manière, en décomposant : $F = \dfrac{2^{2n+1}\times 2^{n}}{2^{3n}} = \dfrac{(2^{n})^{2}\times 2\times 2^{n}}{(2^{n})^{3}} = \dfrac{2^{n}\times 2^{n}\times 2\times 2^{n}}{2^{n}\times 2^{n}\times 2^{n}} = 2$

---

2. $G = \dfrac{2^{3}\times (2^{n})^{2}}{2^{1+2n}}$
$= \dfrac{2^{3}\times 2^{2n}}{2\times 2^{2n}}$
$= 2^{2}$
$= 4$

$H = \dfrac{10^{m+n}}{2^{m}\times 5^{n}}$
$= \dfrac{10^{m}\times 10^{n}}{2^{m}\times 5^{n}}$
$= (\dfrac{10}{2})^{m}\times (\dfrac{10}{5})^{n}$
$= 5^{m}\,2^{n}$

On pouvait aussi faire : $= \dfrac{10^{m}\times 10^{n}}{2^{m}\times 5^{n}} = \dfrac{(2\times 5)^{m}\times (2\times 5)^{n}}{2^{m}\times 5^{n}} = \dfrac{2^{m}\times 5^{m}\times 2^{n}\times 5^{n}}{2^{m}\times 5^{n}} = 5^{m}\,2^{n}$

$I = \dfrac{6^{k}}{2^{k+1}\times 3^{k+1}}$
$= \dfrac{(2\times 3)^{k}}{2^{k}\times 2\times 3^{k}\times 3}$
$= \dfrac{2^{k}\times 3^{k}}{2^{k}\times 2\times 3^{k}\times 3}$
$= \dfrac{1}{6}$

On pouvait aussi faire : $I = \dfrac{6^{k}}{2^{k+1}\times 3^{k+1}} = \dfrac{6^{k}}{(2\times 3)^{k+1}} = \dfrac{6^{k}}{6^{k+1}} = \dfrac{6^{k}}{6^{k}\times 6} = \dfrac{1}{6}$

---

④ **a.** $2^{10} = 2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2$
$= 1\,024$
2^{10} est en effet très proche de $1\,000$, donc de 10^{3}.

b. $2^{30} = (2^{10})^{3}$
$\approx (10^{3})^{3}$
$= 10^{9}$
$= 1\,000\,000\,000$

Donc, un milliard est une bonne estimation de 2^{30}.

c. $2^{33} = 2^{3}\times 2^{30}$ → Je fais apparaître un exposant multiple de 10...
$= 8\times (2^{10})^{3}$ → ... pour pouvoir créer 2^{10} ...
$\approx 8\times (10^{3})^{3}$ → ... et utiliser l'approximation.
$= 8\times 10^{9}$

Donc, il s'écrit 8 suivi de neuf zéros, donc avec dix chiffres.

Remarque : On peut le vérifier par le calcul : $2^{33} = 8\,589\,934\,592$ a bien dix chiffres.

d. $2^{47} = 2^7 \times 2^{40}$
$= 128 \times (2^{10})^4$
$\approx 128 \times (10^3)^4$
$= 128 \times 10^{12}$

Donc, il s'écrit 128 suivi de douze zéros, donc avec quinze chiffres.

Remarque : On peut le vérifier par le calcul : $2^{47} = 140\,737\,488\,355\,328$ a bien quinze chiffres.

e. $2^{103} = 2^3 \times 2^{100}$
$= 8 \times (2^{10})^{10}$
$\approx 8 \times (10^3)^{10}$
$= 8 \times 10^{30}$

8×10^{30} s'écrit avec 31 chiffres, alors que 2^{103} s'écrit avec 32 chiffres.
Avec cette méthode, on s'est trompé d'un chiffre.

f. Ajouter 1 ne change pas le nombre de chiffres (sauf pour les nombres de la forme 999 … 999 , ce qui n'est pas le cas) :

$2^{82\,589\,933} - 1 \approx 2^{82\,589\,933}$
$= 2^3 \times 2^{82\,589\,930}$
$= 8 \times (2^{10})^{8\,258\,993}$
$\approx 8 \times (10^3)^{8\,258\,993}$
$= 8 \times 10^{24\,776\,979}$

24 776 980 ≈ 25 000 000 arrondi au million. → Il faut être prudent dans l'estimation.
Donc, il s'écrit avec environ 25 millions de chiffres.

Remarque : $2^{82\,589\,933} - 1$ s'écrit en fait avec 24 862 048 chiffres.
L'estimation est quand même bonne.

À raison d'un chiffre par seconde, on mettrait donc environ 25 millions de secondes pour l'écrire.
Cela correspond à environ 7 000 heures, ou encore environ 290 jours (sans s'arrêter une seconde... pour dormir, pour manger, boire, etc...) !