Correction de 2^{de} - FONCTIONS - Fiche 1

① **a.** 5 est l'image de -3 par g.

b. 1 est l'image de -1 par F.

c. $1{,}2$ est l'image de 14 par H.

d. $\frac{1}{3}$ est l'image de $\frac{5}{3}$ par f.

e. 0 est l'image de 250 par φ.

---

② **a.** L'image de -2 par f est -1.

→ -2 **a** une image, donc -2 **est** un antécédent, donc il est dans la 1ère ligne.
Et son image est dans la 2ème ligne.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	12	6	-1	-3	1	6	12	15

→ On peut écrire sous forme mathématique $f(-2) = -1$.

L'image de 1 par f est 6.

→ Attention à ne pas confondre avec le 1 qui est dans la 2ème ligne.

b. 12 a au moins deux antécédents par f, qui sont -4 et 2. Mais il peut en avoir d'autres.

→ 12 **a** des antécédents, donc 12 **est** une image, donc il est dans la 2ème ligne.
Mais il y en a deux !

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	12	6	-1	-3	1	6	12	15

De plus, il faut être prudent car on ne connaît pas les images de tous les nombres, seulement de quelques uns...
Rien nous dit que 12 n'est pas l'image d'un nombre avant -4 ou après 3 ?

---

③ **a.**

- $f(-7) = 5\times(-7) - 1$
  $= -36$

  → Je cherche une image : c'est **un simple calcul numérique** en remplaçant x par -7 dans l'expression de $f(x)$.

- $f\left(\frac{1}{3}\right) = 5\times\frac{1}{3} - 1$
  $= \frac{2}{3}$

  → Simple calcul numérique.

b.

- $g(5) = 5^2 + 1$
  $= 26$

  → Simple calcul numérique.

- $g(-3) = (-3)^2 + 1$
  $= 10$

  → Attention à ne pas oublier les parenthèses, sinon -3^2 fait -9 au lieu de 9.

- $g(\sqrt{5}) = (\sqrt{5})^2 + 1$
  $= 6$

  → Parenthèses conseillées...

c.

- $f(x) = 76$

  → Je cherche un antécédent : je résous une **équation**.

  $\Leftrightarrow 5x - 1 = 76$
  $\Leftrightarrow 5x = 76 + 1$
  $\Leftrightarrow 5x = 77$
  $\Leftrightarrow x = \frac{77}{5}$
  $\Leftrightarrow x = 15{,}4$

  Donc, 76 a pour antécédent $15{,}4$ par f.

  → Je n'oublie pas de conclure.

- $f(x) = 1$

  → Équation...

  $\Leftrightarrow 5x - 1 = 1$
  $\Leftrightarrow 5x = 1 + 1$
  $\Leftrightarrow 5x = 2$
  $\Leftrightarrow x = \frac{2}{5}$
  $\Leftrightarrow x = 0{,}4$

  Donc, 1 a pour antécédent $0{,}4$ par f.

- $f(x) = -39$ → Équation…

$\Leftrightarrow 5x - 1 = -39$
$\Leftrightarrow 5x = -39 + 1$
$\Leftrightarrow 5x = -38$
$\Leftrightarrow x = \dfrac{-38}{5}$
$\Leftrightarrow x = -7{,}6$

Donc, -39 a pour antécédent $-7{,}6$ par f.

d.

- $g(x) = 10$ → Je cherche un antécédent : je résous une **équation**.

$\Leftrightarrow x^2 + 1 = 10$
$\Leftrightarrow x^2 = 10 - 1$
$\Leftrightarrow x^2 = 9$
$\Leftrightarrow x = \sqrt{9}$ ou $x = -\sqrt{9}$
$\Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -3$

Donc, 10 a pour antécédents 3 et -3 par g.

On pouvait aussi faire :
$g(x) = 10$
$\Leftrightarrow x^2 + 1 = 10$
$\Leftrightarrow x^2 + 1 - 10 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 - 9 = 0$
$\Leftrightarrow (x - 3)(x + 3) = 0$
$\Leftrightarrow x - 3 = 0$ ou $x + 3 = 0$
$\Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -3$

- $g(x) = 1$ → Équation…

$\Leftrightarrow x^2 + 1 = 1$
$\Leftrightarrow x^2 = 1 - 1$
$\Leftrightarrow x^2 = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$

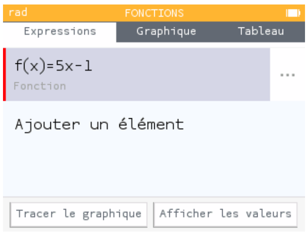
Donc, 1 a pour antécédent 0 par g.

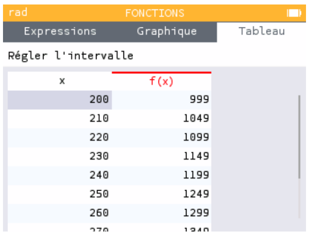
- $g(x) = 0$ → Équation…

$\Leftrightarrow x^2 + 1 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 = 0 - 1$
$\Leftrightarrow x^2 = -1$: c'est impossible car un carré ne peut pas être négatif.

Donc, 0 n'a pas d'antécédent par g.

e. Inutile de vouloir calculer les dix images une par une…
Utilisez le tableur de votre calculatrice.





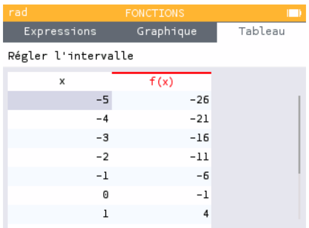
x	200	210	220	230	240	250	260	270	280	290
$f(x)$	999	1049	1099	1149	1199	1249	1299	1349	1399	1449

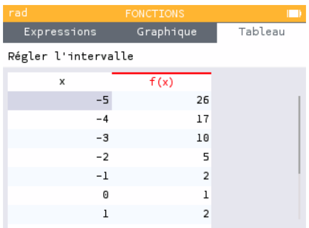
f. De même :

x	5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9
$f(x)$	26	27,01	28,04	29,09	30,16	31,25	32,36	33,49	34,64	35,81

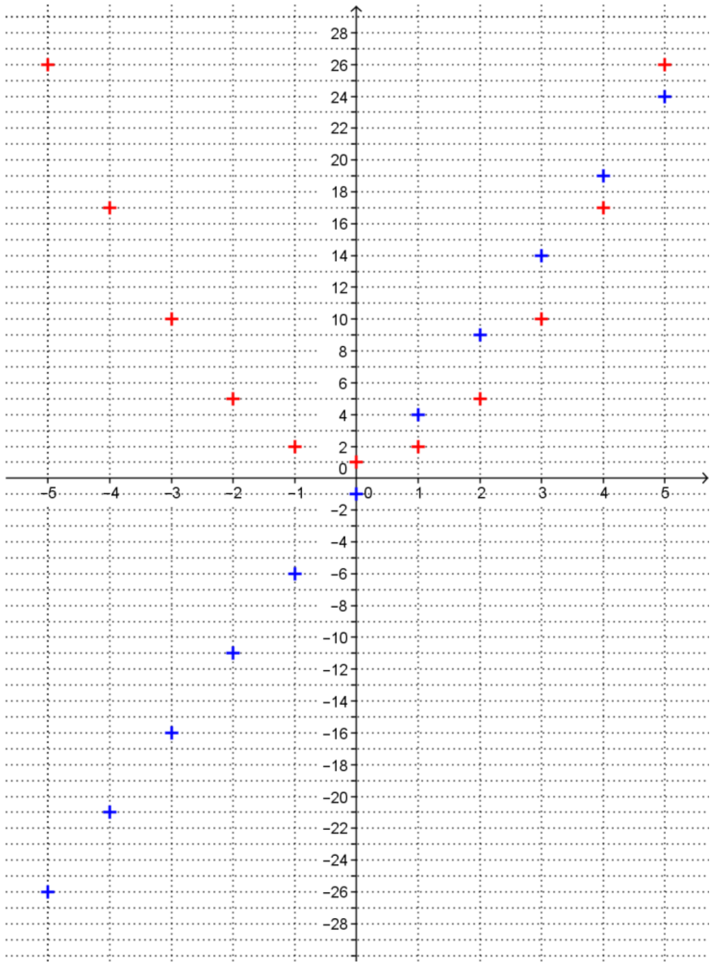
g. La formule en B2 est =A2^2+1 . → Je recopie l'expression en remplaçant x par sa cellule A2 .

h. On utilise encore des tableaux de valeurs donnés par la calculatrice :
Pour f : et pour g :



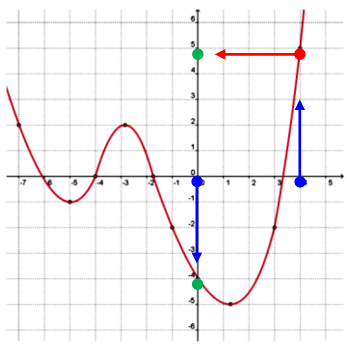


Graphique page suivante.



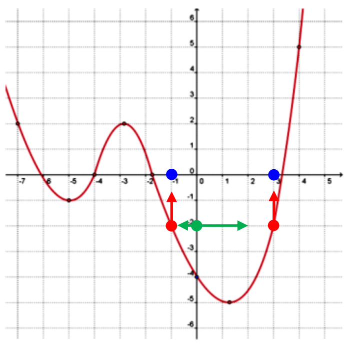
④ **a.** φ(4) = 5 → 4 a une image, donc 4 est un antécédent, donc il est sur l'axe des abscisses.
Je remonte jusqu'à la courbe pour trouver le point.
Je rejoins l'axe des ordonnées pour trouver l'image.

φ(0) = –4 → 0 est sur l'axe des abscisses.
Je descends jusqu'à la courbe pour trouver le point.
Pas besoin de rejoindre l'axe des ordonnées, on y est déjà, pile poil sur l'image.



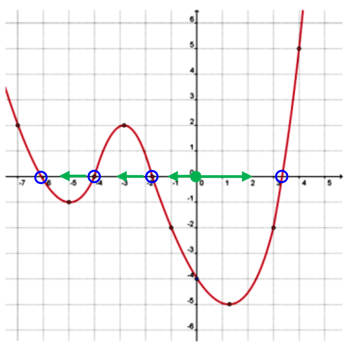
b. Les antécédents de –2 par φ sont –1 et 3 .

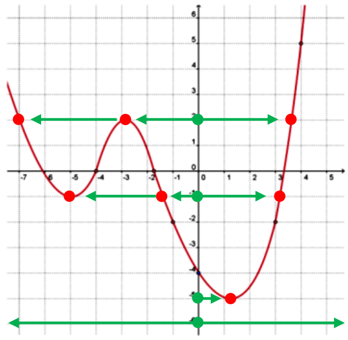
→ 2 a des antécédents, donc 2 est une image, donc il est sur l'axe des ordonnées.
Je rejoins la courbe vers la droite, mais aussi vers la gauche pour trouver deux points.
Je remonte jusqu'à l'axe des abscisses pour trouver les deux antécédents.



c. 0 possède quatre antécédents.
→ 0 est sur l'axe des ordonnées.
Je rejoins la courbe vers la droite et vers la gauche pour trouver quatre points.
Il y a donc quatre antécédents.
Pas besoin de rejoindre l'axe des abscisses, on y est déjà.

Seul –4 est entier. → On voit un seul antécédent entier.



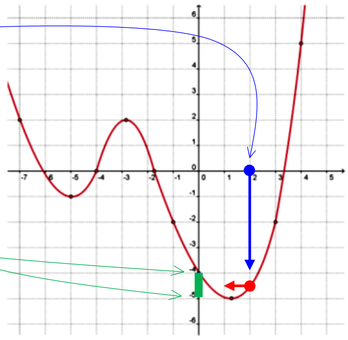


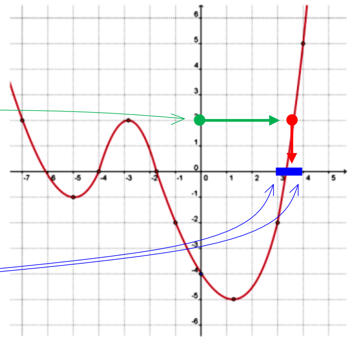
d. -5 n'a qu'un seul antécédent. → *L'antécédent n'est pas demandé…*

e. 2 possède trois antécédents. → *C'est aussi le cas de -1 .*

f. 6 n'a pas d'antécédent. → *Vers la droite ou vers la gauche, on ne rencontre jamais la courbe. C'est aussi le cas de tous les nombres strictement inférieurs à 5 .*

g. $-4 < \varphi(2) < -5$





g) Le plus grand antécédent de 2 est entre 3 et 4 . → *On voit qu'il y a deux autres antécédents, mais négatifs.*

---

⑤ **a.**

- $F(\frac{1}{6}) = 2 - 3\times\frac{1}{6}$ → *Je cherche une image : c'est* ***un simple calcul numérique***.

  $= \frac{3}{2}$

- $G(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2 - 2\times\sqrt{3}$ → *Simple calcul numérique.*

  $= 3 - 2\sqrt{3}$

b.

- $F(x) = -1$ → *Je cherche un antécédent : je résous une* ***équation***.

  $\Leftrightarrow 2 - 3x = -1$

  $\Leftrightarrow -3x = -1 - 2$ → *Attention à ne pas oublier le $-$ devant $3x$.*

  $\Leftrightarrow x = \frac{-3}{-3}$

  $\Leftrightarrow x = 1$

  Donc, -1 a pour antécédent 1 par F . → *Je n'oublie pas de conclure.*

- $G(x) = -1$ → *Équation…*

  $\Leftrightarrow x^2 - 2x = -1$

  $\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$ → *Je reconnais une équation du $2^{ème}$ degré : j'annule le membre de droite.*

  $\Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0$ → *Je factorise (c'est l'identité remarquable $A^2 + 2\times A\times B + B^2$ qui devient $(A + B)^2$).*

  $\Leftrightarrow x - 1 = 0$

  $\Leftrightarrow x = 1$

  Donc, -1 a pour antécédent 1 par G . → *C'est le même que pour F mais c'est un hasard.*

c.

- $F(x) = 0$ → *Équation…*

  $\Leftrightarrow 2 - 3x = 0$

  $\Leftrightarrow -3x = -2$

  $\Leftrightarrow x = \frac{-2}{-3}$

  $\Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$ → *Attention, pas d'arrondi ! Je garde la valeur exacte.*

  Donc, 0 a pour antécédent $\frac{2}{3}$ par F .

- $G(x) = 0$ → *Équation…*

  $\Leftrightarrow x^2 - 2x = 0$ → *Je reconnais une équation du $2^{ème}$ degré, mais le membre de droite vaut déjà 0 .*

  $\Leftrightarrow x(x - 2) = 0$ → *Je factorise (avec un gentil facteur commun…)*

  $\Leftrightarrow x = 0$ ou $x - 2 = 0$

  $\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$

  Donc, 0 a pour antécédents 0 et 2 par G .

⑥ **a.** $h(3) = \sqrt{2\times3+3}$ → Simple calcul numérique.
$= \sqrt{9} = 3$

b. Un nombre qui n'a pas d'image par h est un nombre qu'on n'a pas le droit de mettre à la place de x.
Or, il est interdit de calculer la racine carrée d'un nombre négatif,
donc il faut trouver une valeur de x telle que $2x+3$ est négatif.

Par exemple, lorsque $x = -2$, on a $2x + 3 = 2\times(-2) + 3 = -4 + 3 = -1$ négatif.
Donc, par exemple : -2 n'a pas d'image.

Mais il y en a plein d'autres !

On peut trouver tous les nombres qui n'ont pas d'image en résolvant l'inéquation (voir fiche FCT 03) :
$2x + 3 < 0$
$\Leftrightarrow 2x < -3$
$\Leftrightarrow x < -1{,}5$
Tous les nombres qui n'ont pas d'image par h sont les nombres strictement inférieurs à $-1{,}5$.

c. Un nombre négatif x peut avoir une image à condition que $2x+3$ soit positif ou nul.
Par exemple, lorsque $x = -1$, on a $2x + 3 = 2\times(-1) + 3 = -2 + 3 = 1$ positif.
Donc, par exemple : -1 est négatif et a pour image $h(-1) = \sqrt{2\times(-1)+3} = \sqrt{1} = 1$.
Mais il y en a plein d'autres ! L'infinité des nombres réels négatifs de $[-1{,}5\,;0[$.

d. Un nombre qui n'a pas d'antécédent par h est un nombre qui ne peut pas être mis sous la forme $\sqrt{2x+3}$ quelle que soit la valeur de x.
Or, une racine n'est jamais négative.
Donc, par exemple : -1 n'a pas d'antécédent. → Ne confondez pas le -1 du **c.** et le -1 du **d.** !
C'est aussi le cas de tous les nombres négatifs.

e. $h(0) = \sqrt{2\times0+3} = \sqrt{3}$
Donc, l'image de 0 est un réel irrationnel. → C'est aussi le cas de $h(1) = \sqrt{5}$, de $h(2) = \sqrt{7}$ et de bien d'autres...

d. $h(0{,}5) = \sqrt{2\times0{,}5+3} = \sqrt{4} = 2$
Donc, par exemple, l'image de $0{,}5$ est un nombre entier. → C'est aussi le cas de $h(-1) = 1$, de $h(11) = 5$, de $h(16{,}5) = 6$ et de bien d'autres...

---

⑦ **1.** Pour calculer le prix, on multiplie la masse x par le prix unitaire $2{,}30$: $P(x) = 2{,}3x$

2. Pour calculer la somme totale, on multiplie le nombre de spectacles x par le prix unitaire $6{,}50$ et on y ajoute l'abonnement 150 : $S(x) = 6{,}5x + 150$

3. Pour calculer l'aire du cube, on calcule l'aire d'une face avec x^2 et on multiplie par le nombre de faces 6 : $A(x) = 6x^2$

4. $V(x) = x^3$

---

⑧ **a.** $5 \to 5^2 = 25 \to 25 - 4 = 21 \to 21\times2 = 42$

b. $x \to x^2 \to x^2 - 4 \to (x^2 - 4)\times2 = 2x^2 - 8$
Donc $G(x) = 2x^2 - 8$

c. $G(x) = 120$ → Équation...
$\Leftrightarrow 2x^2 - 8 = 120$
$\Leftrightarrow 2x^2 - 128 = 0$
$\Leftrightarrow 2(x^2 - 64) = 0$
$\Leftrightarrow 2(x^2 - 8^2) = 0$
$\Leftrightarrow 2(x-8)(x+8) = 0$
$\Leftrightarrow x - 8 = 0$ ou $x + 8 = 0$
$\Leftrightarrow x = 8$ ou $x = -8$

Donc, 120 a pour antécédents 8 et -8 par G.

---

⑨ **a.** La variable x prend les valeurs de 0 (quand M est sur A) à 5 (quand M est sur B).

b. Sur la figure, x vaut $AM = 4$ et $\mathcal{A}(4)$ vaut l'aire $6{,}41$.
Donc, $6{,}41$ est l'image de 4 par $\mathcal{A}$.

c. $\begin{cases} (BC) \mathbin{//} (MN) \\ A,\ M \text{ et } B \text{ alignés dans cet ordre} \\ A,\ N \text{ et } C \text{ alignés dans cet ordre} \end{cases}$
donc, d'après le théorème de Thalès,
$\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{AM}{AB}$
donc $\dfrac{AN}{4} = \dfrac{4}{5}$
donc $AN = \dfrac{4}{5}\times 4 = 3{,}2$

On en déduit : $\mathcal{A}(4)$ = aire de $AMN = \dfrac{AM \times AN}{2} = \dfrac{4 \times 3{,}2}{2} = 6{,}4$.

La valeur donnée par *GeoGebra* n'est pas exacte.

d. Il suffit de refaire le même calcul en remplaçant 4 par x :

$\dfrac{AN}{4} = \dfrac{x}{5}$

donc $AN = \dfrac{x}{5} \times 4 = 0{,}8\,x$

On en déduit : $\mathcal{A}(x)$ = aire de $AMN = \dfrac{x \times 0{,}8\,x}{2} = 0{,}4\,x^2$.

e. $\mathcal{A}(x) = 4{,}9$ → Équation...

$\Leftrightarrow 0{,}4\,x^2 = 4{,}9$

$\Leftrightarrow x^2 = \dfrac{4{,}9}{0{,}4}$

$\Leftrightarrow x^2 = 12{,}25$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{12{,}25}$ ou $x = -\sqrt{12{,}25}$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{12{,}25}$ car x est une longueur donc positif

$\Leftrightarrow x = 3{,}5$

Donc, l'aire vaut $4{,}9$ lorsque M est à $3{,}5$ de A .

---

⑪ **1.** **a.** $12 = 2\times2\times3$ donc $\Lambda(12) = 3$

$90 = 2\times3\times3\times5$ donc $\Lambda(90) = 4$

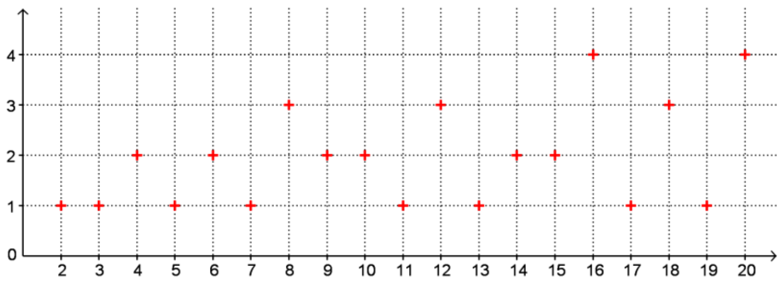
$2^{10} = 2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2$ donc $\Lambda(2^{10}) = 10$

$49\,000 = 2\times2\times2\times5\times5\times5\times7\times7$ donc $\Lambda(49\,000) = 8$

$\dfrac{1}{3}$ n'est pas un entier, il n'a donc pas d'antécédent.

b. Les antécédents de 1 sont les nombres premiers car ce sont les seuls entiers dont la décomposition ne contient qu'un facteur, eux-mêmes.

c.

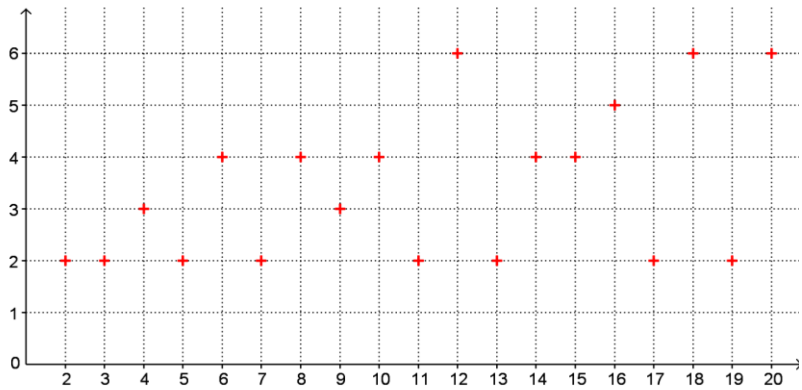


2. **a.** 10 est divisible par 1 ; 2 ; 5 et 10 donc $\Gamma(10) = 4$

11 est divisible par 1 et 11 donc $\Gamma(11) = 2$

b. Les antécédents de 2 sont les nombres premiers car ce sont les seuls entiers à avoir exactement deux diviseurs positifs, 1 et eux-mêmes.

c.



---

⑫ **a.**

```
def f(x) :
    return 5*x-2
for k in range(-10,11) :
    print(f(k))
```

→ Je n'oublie pas les : .

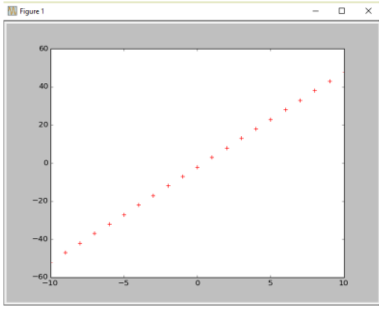
→ Je n'oublie pas le symbole * de la multiplication.

→ Attention, `range(-10,10)` contient les entiers de -10 seulement jusqu'à 9 !

b.

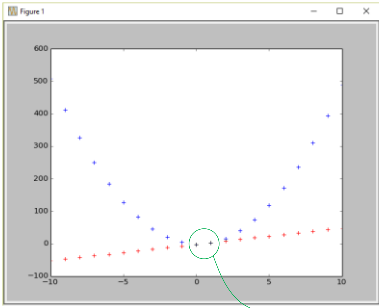
```
from pylab import *
def f(x) :
    return 5*x-2
for k in range(-10,11) :
    plot(k,f(k),"r+")
show()
```

→ Je n'oublie pas d'importer la bibliothèque.



c.

```
from pylab import *
def f(x) :
    return 5*x-2
def g(x) :
    return 5*x**2-x-2
for k in range(-10,11) :
    plot(k,f(k),"r+")
    plot(k,g(k),"b+")
show()
```



d. Il semble que les points d'abscisses 0 et 1 sont communs aux deux courbes.

$\begin{cases} f(0) = 5\times0 - 2 = -2 \\ g(0) = 5\times0^2 - 0 - 2 = -2 \end{cases}$ donc le point de coordonnées $(0\,;-2)$ est commun aux deux courbes.

$\begin{cases} f(1) = 5\times1 - 2 = 3 \\ g(1) = 5\times1^2 - 1 - 2 = 2 \end{cases}$ donc les points d'abscisse 1 ne sont pas communs aux deux courbes.

L'échelle utilisée sur l'axe des ordonnées ne permet pas de distinguer les ordonnées 3 et 2 .

e. Malheureusement, l'instruction `range(-10,11,0.1)` n'est pas comprise par Python, le pas ne pouvant être qu'entier.

Il faut être astucieux…

On demande à la variable `k` de parcourir des valeurs 10 fois trop grandes en allant de -100 à 101 mais on la divise par 10 dans les calculs :

```
from pylab import *
def f(x) :
    return 5*x-2
def g(x) :
    return 5*x**2-x-2
for k in range(-100,101) :
    plot(k/10,f(k/10),"r+")
    plot(k/10,g(k/10),"b+")
show()
```