Savoir CALCULER LES COORDONNÉES D'UN POINT D'INTERSECTION DE DEUX DROITES SÉCANTES

Toute la fiche se passe dans un plan muni d'un repère (O, I, J) orthogonal.

Ce qu'il faut avoir compris

- **Le lien entre les deux appartenances et les deux équations cartésiennes**

  - **Principe** :
    - Le fait que K est le point d'intersection de (d_1) et (d_2)
    - peut s'écrire $K \in (d_1) \cap (d_2)$,
    - signifie que K appartient à (d_1) et K appartient à (d_2)
    - qui peut s'écrire $\begin{cases} K \in (d_1) \\ K \in (d_2) \end{cases}$
    - qui se traduit par $\begin{cases} \text{les coordonnées de } K \text{ vérifient l'équation cartésienne de } (d_1) \\ \text{les coordonnées de } K \text{ vérifient l'équation cartésienne de } (d_2) \end{cases}$

  et si on note $(x ; y)$ les coordonnées de K

  on obtient $\begin{cases} \text{une première équation à deux inconnues } x \text{ et } y \\ \text{une deuxième équation à deux inconnues } x \text{ et } y \end{cases}$

  Cet étrange objet s'appelle un **système de deux équations à deux inconnues** et il faut savoir le résoudre.

Ce qu'il faut savoir faire

- **Calculer les coordonnées du point d'intersection de deux droites sécantes**
  - Généralement, on vous demande d'abord de démontrer que les droites sont sécantes, c'est-à-dire non parallèles (voir fiche **DTE 02**).
  - On me donne les équations cartésiennes $(d_1) : \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = 0$ et $(d_2) : \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 = 0$ des droites.

  Méthode :
  1) J'écris l'équivalence : $M(x ; y) \in (d_1) \cap (d_1) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = 0 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 = 0 \end{cases}$
  2) Je résous ce système de deux équations à deux inconnues (voir ci-dessous).
  3) Les valeurs de x et y sont les coordonnées du point d'intersection.
     Je n'oublie pas de conclure.

- **Résoudre un système de deux équations à deux inconnues**

  Méthode 1 : par identification si on a au départ les deux x ou les deux y faciles à isoler

  1) J'isole les deux x : $\ldots \Leftrightarrow \begin{cases} x = \textit{expression 1 fonction de } y \\ x = \textit{expression 2 fonction de } y \end{cases}$
  2) Je garde la 1^e ligne et j'identifie : $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \textit{expression 1 fonction de } y \\ \textit{expression 1 fonction de } y = \textit{expression 2 fonction de } y \end{cases}$

     Remarque : ***Identifier*** signifie qu'on écrit que deux choses sont égales.

     Remarque : Au lieu de garder la 1^e ligne, on peut garder la 2^e.
  3) La 2^e ligne ne contient plus que des y et je peux en trouver la valeur.
     $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \textit{expression 1 fonction de } y \\ y = \ldots \end{cases}$
  4) J'utilise cette valeur dans la 1^e ligne pour trouver celle de x .
     $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \ldots \\ y = \ldots \end{cases}$

  Remarque : On peut inverser les rôles de y et de x lorsque c'est y qui est facile à isoler.
  C'est notamment le cas quand on me donne des équations réduites.

  Méthode 2 : par substitution si on a au départ un x ou un y facile à isoler dans une des deux équations

  1) J'isole un x : $\ldots \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = 0 \\ x = \textit{expression fonction de } y \end{cases}$
  2) Je substitue : $\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1(\textit{ expression fonction de } y) + \beta_1 y + \gamma_1 = 0 \\ x = \textit{expression fonction de } y \end{cases}$

     Remarque : ***Substituer*** signifie qu'on remplace x par son expression.

3) La 1^e ligne ne contient plus que des y et je peux en trouver la valeur.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \ldots \\ x = \textit{expression fonction de } y \end{cases}$$

4) J'utilise cette valeur dans la 2^e ligne pour trouver celle de x.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \ldots \\ x = \ldots \end{cases}$$

Remarque : On peut inverser les rôles de y et de x lorsque c'est y qui est facile à isoler.

Méthode 3 : par soustraction si on a au départ aucun des x et des y facile à isoler

1) Je multiplie $\left[\begin{array}{l} \text{la 1}^e \text{ ligne par } \alpha_2 \\ \text{et la 2}^e \text{ ligne par } \alpha_1 \end{array}\right.$ … $\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_2 (\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1) = \alpha_2 \times 0 \\ \alpha_1 (\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2) = \alpha_1 \times 0 \end{cases}$

2) Je développe : $\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_2\alpha_1 x + \alpha_2\beta_1 y + \alpha_2\gamma_1 = 0 \\ \alpha_1\alpha_2 x + \alpha_1\beta_2 y + \alpha_1\gamma_2 = 0 \end{cases}$

3) Je soustrais : $\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_2\alpha_1 x + \alpha_2\beta_1 y + \alpha_2\gamma_1 = 0 \\ (\alpha_1\alpha_2 x + \alpha_1\beta_2 y + \alpha_1\gamma_2) - (\alpha_2\alpha_1 x + \alpha_2\beta_1 y + \alpha_2\gamma_1) = 0 - 0 \end{cases}$

Remarque : Au lieu de garder la 1^e ligne, on peut garder la 2^e.

4) Dans la 2^e ligne, les x disparaissent et je trouve la valeur de y.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_2\alpha_1 x + \alpha_2\beta_1 y + \alpha_2\gamma_1 = 0 \\ y = \ldots \end{cases}$$

5) J'utilise cette valeur dans la 1^e ligne pour trouver celle de x.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \ldots \\ y = \ldots \end{cases}$$

Remarque : On peut inverser les rôles de y et de x en multipliant par β_1 et β_2.

Remarque : Suivant les signes, on peut procéder **par addition**.

Remarque : Après 2), on peut continuer **par identification** en exprimant les deux $\alpha_2\alpha_1 x$.

Remarque : Après 2), on peut continuer **par substitution** en exprimant un $\alpha_2\alpha_1 x$ puis en le remplaçant.

Réponse : Si le système est destiné à trouver les coordonnées d'un point d'intersection, on conclut géométriquement.
Mais il arrivera qu'on vous demande de résoudre un système sans contexte géométrique.
Il faudra répondre avec : $\mathscr{S} = \{ \text{couple solution} \}$.

Par exemple, si le système finit par $\begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$, on écrit $\mathscr{S} = \{ (2 ; -3) \}$.

Il faut comprendre qu'il n'y a qu'une solution et que cette solution est le couple de deux nombres.
On n'écrira donc pas $\mathscr{S} = \{ 2 ; -3 \}$ qui est la conclusion de $x = 2$ ou $x = -1$ à deux solutions.

Remarques sur les exercices

- L'exercice ① est un pur exercice de résolution algébrique de systèmes, hors de la géométrie.
- Les autres exercices sont des recherches de points d'intersection de droites.

---

① Résoudre les systèmes de deux équations suivants :

a) $\begin{cases} 2x + y - 13 = 0 \\ 3x + y - 18 = 0 \end{cases}$ *c)* $\begin{cases} 11x - 9y + 55 = 0 \\ -15x + 3y + 27 = 0 \end{cases}$ *e)* $\begin{cases} 1{,}2x + 3{,}6y = 17{,}4 \\ 0{,}7x + 2{,}2y = 9{,}6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 5y = 132 \\ 7x - 3y = 50 \end{cases}$ *d)* $\begin{cases} 5x + 2y + 21 = 0 \\ 11x - y + 30 = 0 \end{cases}$ *f)* $\begin{cases} 81x - 189y = 276 \\ -93x + 217y = -279 \end{cases}$

---

② Soit deux droites sécantes $(d_1) : 6x - 5y + 58 = 0$ et $(d_2) : x + 8y = 61$.

Déterminer les coordonnées de A le point d'intersection.

③ Soit deux droites $(\Delta) : y = 2x - 5$ et $(d) : y = 3x + 11$.

a. Justifier que ces deux droites sont sécantes.

b. Déterminer les coordonnées du point S , point d'intersection de (Δ) et (d) .

---

④ On considère les points $E\ (3\ ;-9)$, $F\ (9\ ;9)$, $G\ (-1\ ;-5)$ et $H\ (-3\ ;-11)$.

a. Déterminer l'équation réduite de (EF) , puis celle de (GH) .

b. Justifier que (EF) et (GH) sont sécantes.

c. Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection..

---

⑤ Soit les droites $(d_1) : 2x - y - 12 = 0$ et $(d_2) : x + 3y - 27 = 0$.

a. Démontrer que (d_1) et (d_2) sont sécantes.

b. Démontrer que le point K de coordonnées $(9\ ;6)$ est le point d'intersection de ces deux droites.

---

⑥ Les deux exercices sont indépendants.

1. Soit les droites $(d_1) : -4x + y + 19 = 0$, $(d_2) : 2{,}5y + x = 7{,}5$ et $(d_3) : 2x + 5y = 59$.
Déterminer tous les points d'intersection formés par ces trois droites.

2. Soit trois droites deux à deux sécantes $(D) : 6x - 5y = -58$, $(D') : 2x + 8y = 58$ et $(D'') : x - 10 = 0$.
Déterminer les coordonnées des trois points d'intersection.

---

⑦ Considérons la droite (Δ) d'équation $8x - 7y + 42 = 0$.
Déterminer les coordonnées du point d'intersection de (Δ) avec l'axe des abscisses, puis les coordonnées de celui avec l'axe des ordonnées.

Cet exercice a été proposé à la fiche **DTE 02**. *Traitez-le cette fois avec une résolution de système.*

---

⑧ On donne le triangle RST avec $R\ (5\ ;8)$, $S\ (16\ ;9)$ et $T\ (3\ ;-2)$.

a. Justifier que la médiane de RST issue de R a bien pour équation $y = -x + 13$.

b. Déterminer l'équation réduite de la médiane de RST issue de S .

c. Déterminer les coordonnées de G point d'intersection des médianes issues de R et de S .

d. Vérifier que G est bien sur la médiane de RST issue de T .

G est donc sur les trois médianes.
On dit qu'il est le **point de concours des médianes** et on l'appelle le **centre de gravité** de RST .
