Correction de 2de - CALCUL ALGÉBRIQUE - Fiche 3

①

$A=\sqrt{49^2}=49$ → Application de $\sqrt{a^2}=a$ avec a positif.

$B=\sqrt{\dfrac{450}{2}}=\sqrt{225}=15$ → Je connais le carré de 15 qui est 225.

$C=(\sqrt{10})^2=10$ → Application de $(\sqrt{a})^2=a$.

$D=\sqrt{3\times3\times3\times3\times3\times3}=\sqrt{(3\times3\times3)^2}$ → Je fais apparaître un carré.
$=3\times3\times3=27$ → Application de $\sqrt{a^2}=a$ avec a positif.

$E=\sqrt{\sqrt{81}}=\sqrt{9}=3$

$F=\sqrt{(-14)^2}$ → On ne peut pas appliquer $\sqrt{a^2}=a$ car -14 n'est pas positif.
$=\sqrt{14^2}=14$ → On retiendra que $(-a)^2=a^2$.

$G=\sqrt{6^2\times11^2}$ → On ne peut pas appliquer $\sqrt{a^2}=a$ car la multiplication empêche le contact entre la racine et les carrés.
$=\sqrt{(6\times11)^2}$ → Je fais apparaître un carré avec la formule $a^2\times b^2=(a\times b)^2$.
$=6\times11=66$

$H=\sqrt{5}\times\sqrt{3}\times\sqrt{5}\times\sqrt{3}$
$=(\sqrt{5})^2\times(\sqrt{3})^2=5\times3=15$

$I=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$ → Attention à ne pas écrire $\sqrt{16}+\sqrt{9}$.

$J=\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}$
$=(\sqrt{3})^2\times(\sqrt{3})^2\times(\sqrt{3})^2\times(\sqrt{3})^2$
$=3\times3\times3\times3=81$

$K=\sqrt{900}=30$

$L=\sqrt{2^{10}}=\sqrt{(2^5)^2}$ → Je fais apparaître un carré avec la formule $a^{n\times m}=(a^n)^m$ (remarquez que ça ne fonctionne pas avec $\sqrt{(2^2)^5}$).
$=2^5=32$

$M=(\sqrt{10})^4=((\sqrt{10})^2)^2$ → Je fais apparaître un carré avec la formule $a^{n\times m}=(a^n)^m$.
$=10^2=100$ → C'est le carré vert qui a éliminé la racine, le rouge est toujours là.

$N=\sqrt{810\,000}=900$

$O=\sqrt{16}+\sqrt{9}=4+3=7$ → Attention à ne pas écrire $\sqrt{25}$.

$P=((\sqrt{5})^3)^2$ → Rien à faire avec un cube en contact avec une racine carrée...
$=((\sqrt{5})^2)^3$ → J'utilise astucieusement la formule $(a^n)^m=a^{n\times m}=a^{m\times n}=(a^m)^n$.
$=5^3=125$

$Q=2\sqrt{3}\times3\sqrt{3}$
$=2\times3\times(\sqrt{3})^2$
$=6\times3=18$

$R=(\sqrt{10})^6=((\sqrt{10})^2)^3$ → Je fais apparaître un carré avec la formule $a^{n\times m}=(a^n)^m$.
$=10^3=1\,000$

$S=(-\sqrt{5})^2=(\sqrt{5})^2$ → On utilise $(-a)^2=a^2$.
$=5$

② **1.** $A=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$ → Car $50=25\times2=5^2\times2$: le 5 sort et le 2 reste dedans.

$B=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ → Car $8=4\times2=2^2\times2$: le 2 sort et le 2 reste dedans.

$C=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$ → Car $27=9\times3=3^2\times3$: le 3 sort et le 3 reste dedans.

$D=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$ → Car $28=4\times7=2^2\times7$: le 2 sort et le 7 reste dedans.

$E=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$ → Car $18=9\times2=3^2\times2$: le 3 sort et le 2 reste dedans.

$F=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$ → Car $125=25\times5=5^2\times5$: le 5 sort et le 5 reste dedans.

$G=\sqrt{98}=7\sqrt{2}$ → Car $98=49\times2=7^2\times2$: le 7 sort et le 2 reste dedans.

$H=\sqrt{500}=10\sqrt{5}$ → Car $500=100\times5=10^2\times5$: le 10 sort et le 5 reste dedans.

2. *Les détails de décomposition en vert peuvent être sautés.*

$I = \sqrt{99} = \sqrt{9\times 11} = \sqrt{3^2\times 11} = 3\sqrt{11}$

$J = \sqrt{180} = \sqrt{18\times 10} = \sqrt{2\times 3\times 3\times 2\times 5} = \sqrt{2^2\times 3^2\times 5} = 2\times 3\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$

$K = \sqrt{48} = \sqrt{2\times 2\times 2\times 2\times 3} = \sqrt{2^2\times 2^2\times 3} = 2\sqrt{6}$

$L = \sqrt{120} = \sqrt{12\times 10} = \sqrt{2\times 2\times 3\times 2\times 5} = \sqrt{2^2\times 30} = 2\sqrt{30}$

$M = \sqrt{72} = \sqrt{8\times 9} = \sqrt{2\times 4\times 9} = \sqrt{2^2\times 3^2\times 2} = 2\times 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

$N = \sqrt{162} = \sqrt{2\times 81} = \sqrt{2\times 9^2} = 9\sqrt{2}$

$O = \sqrt{800} = \sqrt{8\times 100} = \sqrt{2\times 2^2\times 10^2} = 2\times 10\sqrt{2} = 20\sqrt{2}$

---

3. $P = \sqrt{588} = \sqrt{2\times 2\times 3\times 7\times 7} = \sqrt{2^2\times 7^2\times 3} = 2\times 7\sqrt{3} = 14\sqrt{3}$

$Q = \sqrt{242} = \sqrt{2\times 121} = \sqrt{2\times 11^2} = 11\sqrt{2}$

$R = \sqrt{3\,150} = \sqrt{2\times 3\times 3\times 5\times 5\times 7} = \sqrt{3^2\times 5^2\times 2\times 3} = 3\times 5\sqrt{6} = 15\sqrt{6}$

---

4. $S = \sqrt{25n} = \sqrt{5^2\times n} = 5\sqrt{n}$ → *Le* 5 *sort et le* n *reste dedans.*

$T = \sqrt{6n^2} = n\sqrt{6}$ → *Le* n *sort et le* 6 *reste dedans.*

$U = \sqrt{12m} = \sqrt{3\times 2^2\times m} = 2\sqrt{3m}$ → *Le* 2 *sort et le* 3 *et le* m *restent dedans.*

$V = \sqrt{9mn^2} = \sqrt{3^2\times m\times n^2} = 3n\sqrt{m}$ → *Le* 3 *et le* n *sortent et le* m *reste dedans.*

$W = \sqrt{50n^3} = \sqrt{2\times 5^2\times n\times n^2} = 5n\sqrt{2n}$ → *Le* 5 *et le* n *sortent et le* 2 *et l'autre* n *restent dedans.*

$X = \sqrt{27m^2n^5} = \sqrt{3\times 3^2\times m^2\times n\times n^2\times n^2} = 3n^2n^2\sqrt{3n}$

---

③ **1.** **a.** $x^2 = 50$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{50}$ ou $x = -\sqrt{50}$

$\Leftrightarrow x = 5\sqrt{2}$ ou $x = -5\sqrt{2}$

$\mathscr{S} = \{\ 5\sqrt{2}\ ; -5\sqrt{2}\ \}$

b. $x^2 + 9 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = -9$: impossible

$\mathscr{S} = \varnothing$

c. $x^2 - 3 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = 3$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$

$\mathscr{S} = \{\ \sqrt{3}\ ; -\sqrt{3}\ \}$

d. $9x^2 = 25$

$\Leftrightarrow x^2 = \dfrac{25}{9}$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{\dfrac{25}{9}}$ ou $x = -\sqrt{\dfrac{25}{9}}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}}$ ou $x = -\dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{5}{3}$ ou $x = -\dfrac{5}{3}$

$\mathscr{S} = \{\ \dfrac{5}{3} ; -\dfrac{5}{3}\ \}$

e. $1 - x^2 = -7$

$\Leftrightarrow -x^2 = -7 - 1$

$\Leftrightarrow -x^2 = -8$

$\Leftrightarrow x^2 = 8$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{8}$ ou $x = -\sqrt{8}$

$\Leftrightarrow x = 2\sqrt{2}$ ou $x = -2\sqrt{2}$

$\mathscr{S} = \{\ 2\sqrt{2}\ ; -2\sqrt{2}\ \}$

f. $(x-2)^2 = 81$

$\Leftrightarrow x-2=\sqrt{81}$ ou $x-2=-\sqrt{81}$

$\Leftrightarrow x-2=9$ ou $x-2=-9$

$\Leftrightarrow x=9+2$ ou $x=-9+2$

$\Leftrightarrow x=11$ ou $x=-7$

$\mathscr{S} = \{ 11 ; -7 \}$

---

2. **a.** $P = RI^2$

$\Leftrightarrow 50 = R\times 2^2$ → Je remplace les valeurs connues et j'obtiens une équation d'inconnue R.

$\Leftrightarrow 4R = 50$

$\Leftrightarrow R = \dfrac{50}{4}$

$\Leftrightarrow R = 12{,}5$

Donc, la résistance vaut 12,5 Ω.

b. $P = RI^2$

$\Leftrightarrow 44\,100 = 400\,I^2$ → Je remplace les valeurs connues et j'obtiens une équation d'inconnue I.

$\Leftrightarrow I^2 = \dfrac{44\,100}{400}$

$\Leftrightarrow I^2 = 110{,}25$

$\Leftrightarrow I=\sqrt{110{,}25}$ ou $I=-\sqrt{110{,}25}$

$\Leftrightarrow I=\sqrt{110{,}25}$ car I est positif → Vous devez justifier l'absence de la solution négative.

$\Leftrightarrow I = 10{,}5$

Donc, l'intensité vaut 10,5 A.

c. Dans la question précédente, vous avez **isolé l'inconnue** pour obtenir **sa valeur numérique**.
Il s'agit de faire pareil pour pour obtenir **sa valeur littérale**.

$P = RI^2$

$\Leftrightarrow I^2 = \dfrac{P}{R}$

$\Leftrightarrow I=\sqrt{\dfrac{P}{R}}$ ou $I=-\sqrt{\dfrac{P}{R}}$

$\Leftrightarrow I=\sqrt{\dfrac{P}{R}}$ car I est positif → C'est terminé, I est exprimé en fonction de P et de R.

---

3. **a.** $A = \pi R^2$

$\Leftrightarrow \pi R^2 = 300$ → Équation d'inconnue R.

$\Leftrightarrow R^2 = \dfrac{300}{\pi}$

$\Leftrightarrow R=\sqrt{\dfrac{300}{\pi}}$ ou $R=-\sqrt{\dfrac{300}{\pi}}$

$\Leftrightarrow R=\sqrt{\dfrac{300}{\pi}}$ car R est positif

Remarquez qu'il ne faut pas écrire $3{,}14$ à la pace de π, sinon on perd l'exacte égalité.

Donc, $R \approx 9{,}8$ → Je laisse la calculatrice gérer π et j'arrondis $9{,}772...$ correctement.

Donc, le rayon vaut environ 9,8 cm arrondi à 0,1 cm.

b. $A = \pi R^2$

$\Leftrightarrow R^2 = \sqrt{\dfrac{A}{\pi}}$

$\Leftrightarrow R=\sqrt{\dfrac{A}{\pi}}$ ou $R=-\sqrt{\dfrac{A}{\pi}}$

$\Leftrightarrow R=\sqrt{\dfrac{A}{\pi}}$ car R est positif

---

④ **1.** $A = \sqrt{20} + \sqrt{5}$ → $\sqrt{20}$ doit pouvoir être simplifié de tête.

$= 2\sqrt{5} + \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

$B = \sqrt{2} + \sqrt{8}$ → $\sqrt{8}$ doit pouvoir être simplifié de tête.

$= \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

$C = \sqrt{300} - \sqrt{3}$ → $\sqrt{300}$ doit pouvoir être simplifié de tête.

$= 10\sqrt{3} - \sqrt{3} = 9\sqrt{3}$

2. $D = \sqrt{12} + \sqrt{75}$

$= \sqrt{3\times2^2} + \sqrt{3\times5^2}$ → Je décompose en faisant apparaître les carrés.

$= 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$ → Je "sors" et je " laisse dedans" .

$= 7\sqrt{3}$ → Je réduis comme je le ferais avec $2x + 5x$.

$E = \sqrt{50} - \sqrt{18}$

$= \sqrt{2\times5^2} - \sqrt{2\times3^2}$

$= 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$

$= 2\sqrt{2}$

$F = \sqrt{45} - \sqrt{500} + \sqrt{125}$

$= \sqrt{5\times3^2} - \sqrt{5\times10^2} + \sqrt{5\times5^2}$

$= 3\sqrt{5} - 10\sqrt{5} + 5\sqrt{5}$

$= -2\sqrt{5}$

$G = \sqrt{8} + \sqrt{12} + \sqrt{18}$

$= \sqrt{2\times2^2} + \sqrt{3\times2^2} + \sqrt{2\times3^2}$

$= 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$

$= 5\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$ → Attention, on peut réduire les $\sqrt{2}$ ensemble mais pas avec les $\sqrt{3}$.

$H = \sqrt{54} - \sqrt{150}$

$= \sqrt{6\times3^2} - \sqrt{6\times5^2}$

$= 3\sqrt{6} - 5\sqrt{6}$

$= -2\sqrt{6}$

---

3. $I = 3\sqrt{28} + 2\sqrt{700}$

$= 3\sqrt{7\times2^2} + 2\sqrt{7\times10^2}$

$= 3\times2\sqrt{7} + 2\times10\sqrt{7}$ → Ne confondez pas le 2 qui sort de la racine et le 3 qui était déjà dehors depuis le début.

$= 6\sqrt{7} + 20\sqrt{7}$

$= 26\sqrt{7}$

$J = 5\sqrt{27} - 2\sqrt{75} + 12\sqrt{12}$

$= 5\sqrt{3\times3^2} - 2\sqrt{3\times5^2} + 12\sqrt{3\times2^2}$

$= 5\times3\sqrt{3} - 2\times5\sqrt{3} + 12\times2\sqrt{3}$

$= 15\sqrt{3} - 10\sqrt{3} + 24\sqrt{3}$

$= 29\sqrt{3}$

$K = 3\sqrt{80} + 2\sqrt{275} - 5\sqrt{125}$

$= 3\sqrt{5\times2^2\times2^2} + 2\sqrt{5\times11^2} - 5\sqrt{5\times5^2}$

$= 3\times2\times2\sqrt{5} + 2\times11\sqrt{5} - 5\times5\sqrt{5}$ → En écrivant $\sqrt{80}$ sous la forme $\sqrt{5\times4^2}$, on pouvait sortir directement 4 .

$= 12\sqrt{5} + 22\sqrt{5} - 25\sqrt{5}$

$= 9\sqrt{5}$

---

4. $L = \sqrt{9n} + \sqrt{n}$

$= \sqrt{3^2\times n} + \sqrt{n}$

$= 3\sqrt{n} + \sqrt{n}$

$= 4\sqrt{n}$

$M = \sqrt{50n} - \sqrt{32n}$

$= \sqrt{2\times5^2\times n} - \sqrt{2\times4^2\times n}$

$= 5\sqrt{2n} - 4\sqrt{2n}$

$= \sqrt{2n}$

$N = \sqrt{n^3} + \sqrt{n}$

$= \sqrt{n^2\times n} + \sqrt{n}$

$= n\sqrt{n} + \sqrt{n}$

$= (n+1)\sqrt{n}$ → Pour comprendre cette réduction, pensez qu'on factorise en mettant $\sqrt{n}$ en facteur.

$O = \sqrt{28n} + \sqrt{175n^3}$

$= \sqrt{7\times2^2\times n} + \sqrt{7\times5^2\times n^2\times n}$

$= 2\sqrt{7n} + 5n\sqrt{7n}$

$= (2+5n)\sqrt{7n}$

$P = \sqrt{4m^2n} - \sqrt{m^4n^3}$
$= \sqrt{2^2 \times m^2 \times n} - \sqrt{m^2 \times m^2 \times n^2 \times n}$
$= 2m\sqrt{n} + m \times m \times n\sqrt{n}$
$= 2m\sqrt{n} + m^2n\sqrt{n}$
$= (2m + m^2n)\sqrt{n}$ → Jusqu'à éventuellement $m(2 + mn)\sqrt{n}$ pour les puristes.

---

⑤ $A = \sqrt{6} \times \sqrt{15}$
$= \sqrt{2 \times 3} \times \sqrt{3 \times 5}$
$= \sqrt{2 \times 3 \times 3 \times 5}$
$= \sqrt{2 \times 3^2 \times 5}$
$= 3\sqrt{2 \times 5}$
$= 3\sqrt{10}$ → Cette présentation est très détaillée, on peut aller un peu plus vite.

On peut aussi décomposer hors des racines :
$A = \sqrt{6} \times \sqrt{15}$
$= \sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{5}$
$= (\sqrt{3})^2 \times \sqrt{2 \times 5}$
$= 3\sqrt{10}$

$B = \sqrt{14} \times \sqrt{35} \times \sqrt{10}$
$= \sqrt{2 \times 7} \times \sqrt{5 \times 7} \times \sqrt{2 \times 5}$
$= \sqrt{2^2 \times 5^2 \times 7^2}$ → Ou aussi : $(\sqrt{2})^2 \times (\sqrt{5})^2 \times (\sqrt{7})^2$.
$= 2 \times 5 \times 7$ → Ah ben, il n'y a plus personne sous le radical !
$= 70$

$C = 3\sqrt{20} \times 5\sqrt{8}$
$= 3\sqrt{2^2 \times 5} \times 5\sqrt{2^2 \times 2}$
$= 3 \times 2\sqrt{5} \times 5 \times 2\sqrt{2}$
$= 60\sqrt{10}$

$D = 3\sqrt{150} \times \sqrt{192}$
$= 3\sqrt{5^2 \times 2 \times 3} \times 5\sqrt{2^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 3}$
$= 3 \times 5\sqrt{2} \times \sqrt{3} \times 5 \times 2 \times 2 \times 2\sqrt{3}$
$= 600 \times (\sqrt{3})^2 \times \sqrt{2}$
$= 600 \times 3 \times \sqrt{2}$
$= 1\,800\sqrt{2}$

$E = 5\sqrt{n} \times 3\sqrt{3n} \times \sqrt{5n}$
$= 5\sqrt{n} \times 3\sqrt{3} \times \sqrt{n} \times \sqrt{5} \times \sqrt{n}$
$= 15 \times (\sqrt{n})^2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{5} \times \sqrt{n}$
$= 15n\sqrt{15n}$

---

⑥ Pour ces développements avec racines carrées, adoptez la même technique rapide que pour les développements littéraux :
- multipliez d'abord les signes,
- multipliez ensuite les entiers,
- puis multipliez les racines carrées.

$A = (4\sqrt{3} - 5)(2\sqrt{2} - \sqrt{3})$
$= 8\sqrt{6} - 4 \times 3 - 10\sqrt{2} + 5\sqrt{3}$

+ par +   4 x 2 $\sqrt{3} \times \sqrt{2}$ + par −   4 x 1 $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$

$= -12 - 10\sqrt{2} + 5\sqrt{3} + 8\sqrt{6}$ → On peut mettre dans l'ordre.

$B = (7 + 3\sqrt{5})^2$ → Identité remarquable $(a + b)^2$, bien sûr... Avec $a = 7$ et $b = 3\sqrt{5}$.
$= 7^2 + 2 \times 7 \times 3\sqrt{5} + (3\sqrt{5})^2$
$a^2 + 2\,a\,b + b^2$
$= 49 + 42\sqrt{5} + 9 \times 5$ → 9 est le carré de 3 et 5 est le carré de $\sqrt{5}$.
$= 94 + 42\sqrt{5}$

$C = (6\sqrt{5} - 5\sqrt{7})^2$
$= (6\sqrt{5})^2 - 2 \times 6\sqrt{5} \times 5\sqrt{7} + (5\sqrt{7})^2$
$= 36 \times 5 - 60\sqrt{35} + 25 \times 7$
$= 355 - 60\sqrt{35}$

$D = (\sqrt{5} - 3\sqrt{2})(\sqrt{5} + 3\sqrt{2})$ → Avez-vous vu l'identité remarquable ?

$= (\sqrt{5})^2 - (3\sqrt{2})^2$

$= 5 - 9\times2$

$= -13$

$E = (\sqrt{n} - \sqrt{2})(\sqrt{n} + 2\sqrt{2})$

$= \underbrace{n}_{\sqrt{n}\times\sqrt{n}} + \underbrace{2\sqrt{2n}}_{\sqrt{n}\times2\sqrt{2}} - \underbrace{\sqrt{2n}}_{\sqrt{2}\times\sqrt{n}} - \underbrace{2\times2}_{\sqrt{2}\times2\sqrt{2}}$

$= n - 4 + \sqrt{2n}$

$F = (2\sqrt{m} + 3\sqrt{n})^2$ → Encore une identité remarquable...

$= (2\sqrt{m})^2 + 2\times2\sqrt{m}\times3\sqrt{n} + (3\sqrt{n})^2$

$= 4m + 12\sqrt{mn} + 9n$

$= 4m + 9n + 12\sqrt{mn}$

---

⑦ **1.** $A = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$= \dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}$ → J'élimine la racine carrée du dénominateur en multipliant en haut et en bas par $\sqrt{5}$.

$= \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ → C'est terminé, le dénominateur est entier.

$B = \dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$= \dfrac{(1+\sqrt{2})\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$ → Attention à multiplier <u>tout le numérateur</u> par $\sqrt{2}$ <u>en mettant des parenthèses</u> !

$= \dfrac{\sqrt{2}+2}{2}$ → Attention à ne pas simplifier par 2 .

$C = \dfrac{7}{2\sqrt{3}}$

$= \dfrac{7\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\times\sqrt{3}}$ → Il est inutile de multiplier par $2\sqrt{3}$, il suffit de multiplier par $\sqrt{3}$.

$= \dfrac{7\sqrt{3}}{2\times3}$

$= \dfrac{7\sqrt{3}}{6}$

$D = \dfrac{2-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$

$= \dfrac{(2-\sqrt{5})\sqrt{5}}{2\sqrt{5}\times\sqrt{5}}$

$= \dfrac{2\sqrt{5}-5}{2\times5}$

$= \dfrac{2\sqrt{5}-5}{10}$ → Aucune simplification possible...

$E = \dfrac{3\sqrt{10}}{\sqrt{6}}$

$= \dfrac{3\sqrt{10}\times\sqrt{6}}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}$ → Attention à ne pas répondre $\dfrac{3\sqrt{60}}{6}$ car...

$= \dfrac{3\sqrt{2\times5\times2\times3}}{6}$ → ... il faut chercher à simplifier la racine en décomposant.

$= \dfrac{3\sqrt{2^2\times15}}{6}$

$= \dfrac{\cancel{3\times2}\sqrt{15}}{\cancel{6}}$ → Et il n'y a pas que la racine à simplifier, la fraction aussi !

$= \sqrt{15}$

On pouvait peut-être aller plus vite :

$E = \dfrac{3\sqrt{10}}{\sqrt{6}}$

$= \dfrac{3\times\cancel{\sqrt{2}}\times\sqrt{5}}{\cancel{\sqrt{2}}\times\sqrt{3}}$

et multiplier par $\sqrt{3}$.

$F = \dfrac{4\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$

$= \dfrac{(4\sqrt{3} + 2\sqrt{2})\sqrt{6}}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}}$ → Parenthèses indispensables...

$= \dfrac{4\sqrt{3\times2\times3} + 2\sqrt{2\times2\times3}}{6}$ → Décomposer...

$= \dfrac{4\times3\sqrt{2} + 2\times2\sqrt{3}}{6}$

$= \dfrac{12\sqrt{2} + 4\sqrt{3}}{6}$

$= \dfrac{\cancel{2}(6\sqrt{2} + 2\sqrt{3})}{\cancel{2}\times3}$ → 2 est un facteur commun des deux termes du numérateur, je le factorise pour ...

$= \dfrac{6\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{3}$ → ... simplifier la fraction.

$G = \dfrac{1 - 2\sqrt{7}}{7\sqrt{7}}$

$= \dfrac{(1 - 2\sqrt{7})\sqrt{7}}{7\sqrt{7} \times \sqrt{7}}$

$= \dfrac{\sqrt{7} - 2\times7}{7\times7}$

$= \dfrac{\sqrt{7} - 14}{49}$

---

2. $I = \dfrac{5}{1 + \sqrt{2}}$

$= \dfrac{5(1 - \sqrt{2})}{(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})}$ → Je multiplie en haut et en bas par $1 - \sqrt{2}$, le conjugué de $1 + \sqrt{2}$.

$= \dfrac{5 - 5\sqrt{2}}{1^2 - (\sqrt{2})^2}$ → J'applique l'identité remarquable ...

$= \dfrac{5 - 5\sqrt{2}}{1 - 2}$ → ... et il n'y a plus de racines carrées !

$= \dfrac{5 - 5\sqrt{2}}{-1}$

$= -5 + 5\sqrt{2}$ → Diviser par -1 revient à changer les signes.

$J = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 2}$

$= \dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{3} + 2)}{(\sqrt{3} - 2)(\sqrt{3} + 2)}$

$= \dfrac{3 + 2\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2 - 2^2}$

$= \dfrac{3 + 2\sqrt{3}}{3 - 4}$

$= \dfrac{3 + 2\sqrt{3}}{-1}$

$= -3 - 2\sqrt{3}$

$K = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{5}}$

$= \dfrac{(1 + \sqrt{5})(\sqrt{2} - \sqrt{5})}{(\sqrt{2} + \sqrt{5})(\sqrt{2} - \sqrt{5})}$ → Gros calcul, mais il faut se lancer !

$= \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{5} + \sqrt{10} - 5}{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{5})^2}$

$= \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{5} + \sqrt{10} - 5}{2 - 5}$

$= \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{5} + \sqrt{10} - 5}{-3}$

$= \dfrac{-\sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{10} + 5}{3}$ → Le signe − au dénominateur n'est pas élégant, on le "remonte" au numérateur en changeant tous les signes.

$L = \dfrac{\sqrt{5} + 2\sqrt{3}}{5\sqrt{3} - \sqrt{5}}$

$= \dfrac{(\sqrt{5} + 2\sqrt{3})(5\sqrt{3} + \sqrt{5})}{(5\sqrt{3} - \sqrt{5})(5\sqrt{3} + \sqrt{5})}$

$= \dfrac{5\sqrt{15} + 5 + 10\times 3 + 2\sqrt{15}}{(5\sqrt{3})^2 - (\sqrt{5})^2}$ → Attention à bien faire porter les carrés à $5\sqrt{3}$ et pas seulement à $\sqrt{3}$.

$= \dfrac{35 + 7\sqrt{15}}{25\times 3 - 5}$ → $(5\sqrt{3})^2$ devient $5^2\times(\sqrt{3})^2$ et donc 25×3 .

$= \dfrac{35 + 7\sqrt{15}}{70}$

$= \dfrac{7(5 + \sqrt{15})}{7\times 10}$ → Je factorise par 7 …

$= \dfrac{5 + \sqrt{15}}{10}$ → … pour simplifier.

---

⑧ Pour démontrer qu'un nombre A est la racine carrée d'un nombre B , il faut vérifier deux choses :

- que le carré de A vaut B ,
- que A est positif.

Commençons par montrer que le carré de $3 + \sqrt{5}$ vaut $14 + 6\sqrt{5}$:

D'une part :

$(3 + \sqrt{5})^2 = 3^2 + 2\times 3\times\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2$

$= 9 + 6\sqrt{5} + 5$

$= 14 + 6\sqrt{5}$

Puis montrons que $3 + \sqrt{5}$ vaut $14 + 6\sqrt{5}$:

D'autre part :

3 et $\sqrt{5}$ sont positifs,

donc $3 + \sqrt{5}$ est positif.

On en déduit que $3 + \sqrt{5}$ est la racine carrée de $14 + 6\sqrt{5}$.

---

⑨ EGH rectangle en H

donc, d'après le théorème de Pythagore,

$EG^2 = HG^2 + HE^2$

$\Leftrightarrow EG^2 = 5^2 + 10^2$

$\Leftrightarrow EG^2 = 125$ → Remarquez que je ne calcule pas EG car je n'aurai besoin que de EG^2 .

Dans le triangle EFG , on a :

$\begin{cases} EG^2 = 125 \\ GF^2 + EF^2 = (3\sqrt{5})^2 + (4\sqrt{5})^2 = 9\times 5 + 16\times 5 = 125 \end{cases}$

donc $EG^2 = GF^2 + EF^2$

donc, d'après le théorème réciproque de Pythagore, EFG rectangle en F .

---

⑩ **1.** Posons $ABCD$ un carré de côté a .

ABC rectangle en B

donc, d'après le théorème de Pythagore,

$AC^2 = AB^2 + BA^2$

$\Leftrightarrow AC = \sqrt{a^2 + a^2}$ car AC positif → La précision « car AC positif » est importante l'équation carré possède deux solutions.

$\Leftrightarrow AC = \sqrt{2a^2}$

$\Leftrightarrow AC = a\sqrt{2}$ car a positif → La précision « car a positif » est importante car $\sqrt{a^2}$ n'est pas toujours égal à a .

Donc, les diagonales d'un carré de côté a mesurent $a\sqrt{2}$.

2. On passe de la longueur du côté d'un carré à la longueur de sa diagonale en multipliant par $\sqrt{2}$

donc on passe de la longueur de la diagonale d'un carré à la longueur de son côté en divisant par $\sqrt{2}$.

On en déduit que si la diagonale mesure a , alors le côté mesure $\dfrac{a}{\sqrt{2}} = \dfrac{a\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. → N'oubliez pas d'éliminer la racine du dénominateur.

3. Posons $ABCDEFGH$ un cube d'arête a .
L'arête $[AE]$ est verticale et le segment $[AC]$ est la diagonale de la face horizontale $ABCD$
donc ACE rectangle en A
donc, d'après le théorème de Pythagore,

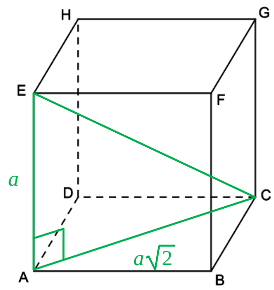
$EC^2 = AE^2 + AC^2$

$\Leftrightarrow EC^2 = a^2 + (a\sqrt{2})^2$ car $[AC]$ est la diagonale du carré $ABCD$ de côté a → Question **1.**

$\Leftrightarrow EC = \sqrt{a^2 + 2a^2}$ car EC positif

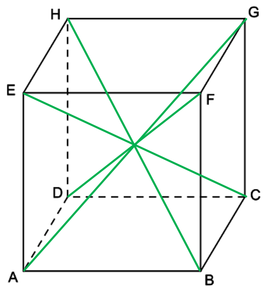
$\Leftrightarrow EC = \sqrt{3a^2}$

$\Leftrightarrow AC = a\sqrt{3}$ car a positif



Donc, les diagonales d'un cube d'arête a mesurent $a\sqrt{3}$.

Profitons-en pour préciser que le cube possède quatre diagonales isométriques (et concourantes) :



4. **a.** $EFGH$ rectangle
donc EFG rectangle en F
donc, d'après le théorème de Pythagore,

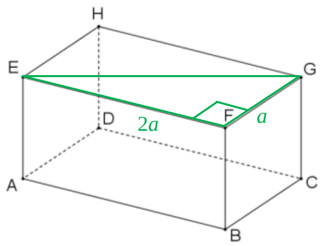
$EG^2 = EF^2 + FG^2$

$\Leftrightarrow EG = \sqrt{(2a)^2 + a^2}$ car EG positif

$\Leftrightarrow EG = \sqrt{4a^2 + a^2}$

$\Leftrightarrow EG = \sqrt{5a^2}$

$\Leftrightarrow EG = a\sqrt{5}$ car a positif



b. L'arête $[AE]$ est verticale et le segment $[EG]$ est la diagonale de la face horizontale $EFGH$
donc AEG rectangle en E
donc, d'après le théorème de Pythagore,

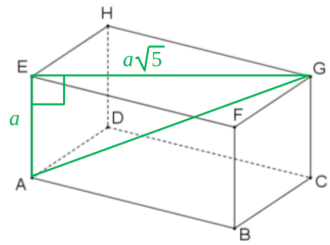
$AG^2 = AE^2 + EG^2$

$\Leftrightarrow AG^2 = a^2 + (a\sqrt{5})^2$

$\Leftrightarrow AG = \sqrt{a^2 + 5a^2}$ car AG positif

$\Leftrightarrow AG = \sqrt{6a^2}$

$\Leftrightarrow AG = a\sqrt{6}$ car a positif

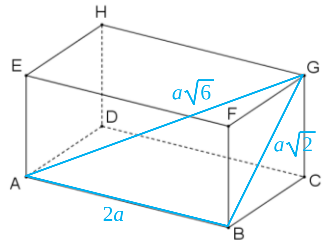


c. $[BG]$ est la diagonale de la face carrée $BCGF$ de côté a
donc $BG = a\sqrt{2}$.

Dans le triangle ABG , on a :

$$\begin{cases} AG^2 = (a\sqrt{6})^2 = 6a^2 \\ AB^2 + BG^2 = (2a)^2 + (a\sqrt{2})^2 = 4a^2 + 2a^2 = 6a^2 \end{cases}$$

donc $AG^2 = AB^2 + BG^2$
donc, d'après le théorème réciproque de Pythagore, ABG est rectangle en B .



---

⑪ **1.** $(\cos 60°)^2 + (\sin 60°)^2 = 1$

$\Leftrightarrow (\frac{1}{2})^2 + (\sin 60°)^2 = 1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4} + (\sin 60°)^2 = 1$

$\Leftrightarrow (\sin 60°)^2 = 1 - \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow (\sin 60°)^2 = \frac{3}{4}$ → On reconnaît une équation carré d'inconnue $\sin 60°$.

$\Leftrightarrow \sin 60° = \sqrt{\frac{3}{4}}$ ou $\sin 60° = -\sqrt{\frac{3}{4}}$ → J'applique la règle des deux solutions opposées...

$\Leftrightarrow \sin 60° = \sqrt{\frac{3}{4}}$ car $\sin 60°$ positif → ... mais j'élimine la solution négative.

$\Leftrightarrow \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}$

$\Leftrightarrow \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{1}{2}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}$ sont les valeurs exactes de $\cos 60°$ et $\sin 60°$.

Remarquez que ce sont aussi les valeurs exactes de $\sin 30°$ et $\cos 30°$.

2. $(\cos 45°)^2 + (\sin 45°)^2 = 1$

$\Leftrightarrow (\cos 45°)^2 + (\cos 45°)^2 = 1$

$\Leftrightarrow 2(\cos 45°)^2 = 1$

$\Leftrightarrow (\cos 45°)^2 = \frac{1}{2}$ → *Équation carré d'inconnue* $\cos 45°$.

$\Leftrightarrow \cos 45° = \sqrt{\frac{1}{2}}$ ou $\cos 45° = -\sqrt{\frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow \cos 45° = \sqrt{\frac{1}{2}}$ car $\cos 45°$ positif

$\Leftrightarrow \cos 45° = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow \cos 45° = \frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

On remarque que $\frac{\sqrt{2}}{2}$ *est aussi la valeur exacte de* $\sin 45°$.

---

⑫ *Pour rédiger cet exercice parfaitement, il faudrait nommer beaucoup de points et faire beaucoup de calculs répétitifs...*
Nous allons nous autoriser une rédaction plus floue mais plus agréable, pour celui qui l'écrit et celui qui la lit.

L'hypoténuse du premier triangle rectangle vaut $\sqrt{2}$.
L'hypoténuse du deuxième triangle rectangle vaut $\sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{3}$.
L'hypoténuse du troisième triangle rectangle vaut $\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4}$.
Et ainsi de suite.
L'hypoténuse du onzième triangle rectangle vaut $\sqrt{1^2 + (\sqrt{11})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

L'angle a pour sinus $\frac{1}{2\sqrt{3}}$.

donc, l'angle mesure environ 16,8°.