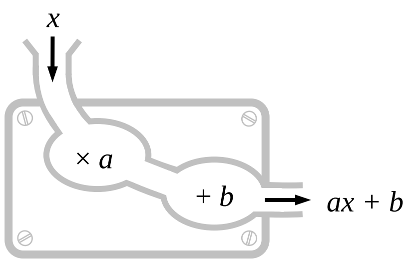
Savoir DÉTERMINER ET UTILISER UNE FONCTION AFFINE

<u>*Ce qu'il faut avoir compris*</u> :



- Une **fonction affine** est une fonction
  qui multiplie par un nombre fixe appelé le **coefficient directeur**
  puis ajoute un autre nombre fixe appelé l'**ordonnée à l'origine**.

  On a donc le schéma général $\boldsymbol{f : x \mapsto ax + b}$
  Et l'expression générale $\boldsymbol{f(x) = ax + b}$.

  Dans cette fiche, on utilisera les lettres a et b traditionnelles pour désigner les coefficients mais ce ne sont pas des notations officielles.

<u>*Ce qu'il faut savoir faire*</u> :

- **Déterminer si une fonction f est affine ou non**

  - Lorsqu'on me donne <u>l'expression</u> de $f(x)$ en fonction de x :

    - si $\begin{cases} \text{la variable } x \text{ est multipliée par un nombre fixe} \\ \text{puis qu'on ajoute un autre nombre fixe,} \end{cases}$ alors <u>f est affine</u>.

      ⚠ Il est entendu qu'une soustraction n'est rien d'autre qu'une addition de l'opposé.
      Et la multiplication peut être cachée... Par exemples, $-x$ est en fait $(-1)\times x$
      $\dfrac{x}{3}$ est en fait $\dfrac{1}{3}\times x$
      $\dfrac{2x}{3}$ est en fait $\dfrac{2}{3}\times x$
      et plus de x du tout est en fait $0\times x$.

      <u>*En particulier*</u> : Si $a = 0$, <u>f est affine constante</u>.
      Si $b = 0$, <u>f est affine linéaire</u> (et les images sont proportionnelles aux antécédents).

    - sinon, <u>f n'est pas affine</u>, en particulier :
      quand x est multipliée par lui-même pour faire un x^2 ou un x^3 , ...
      quand on divise par x avec donc x en dénominateur.

  - Lorsqu'on me donne <u>sa représentation graphique</u> $\mathscr{C}_f$:

    - si $\mathscr{C}_f$ est une droite, alors <u>f est affine</u>.

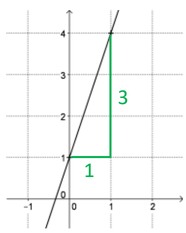
      <u>*En particulier*</u> : Si la droite est parallèle à l'axe des abscisses ("horizontale"), <u>f est affine constante</u>.
      Si la droite passe par l'origine, <u>f est affine linéaire</u>.

    - si $\mathscr{C}_f$ n'est pas une droite, alors <u>f n'est pas affine</u>.

- **Déterminer les coefficients a et b d'une fonction qu'on sait affine**

  - Lorsqu'on me donne <u>l'expression</u> de $f(x)$ en fonction de x :
    on a vu ci-dessus qu'on trouve un nombre fixe qui multiplie la variable x , c'est le coefficient directeur a , et qu'on trouve un nombre fixe qu'on ajoute, c'est l'ordonnée à l'origine b .

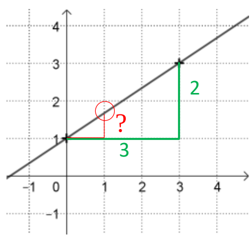
  - Lorsqu'on me donne <u>sa droite représentation graphique</u> $\mathscr{D}_f$:
    1) Je trouve d'abord b à l'intersection de la droite $\mathscr{D}_f$ avec l'axe des ordonnées.
    2) Je trouve a par la méthode de l'escalier :
       - je pars d'un point de $\mathscr{D}_f$ (en général celui de l'axe des ordonnées),
       - j'avance de 1 unité vers la droite,
       - je monte ou je descends jusqu'à un deuxième point de $\mathscr{D}_f$,
       - le nombre de carreaux parcourus verticalement est a , positif si on est monté, négatif si on est descendu.



J'avance de 1 et je monte de 3, donc $a = 3$.

⚠ Parfois, en avançant de 1 unité, on n'arrive pas à monter ou descendre d'un nombre entier de carreaux.
Il faut alors "tricher" en avançant de plus de 1 unité :

Avancer de D carreaux et monter de N carreaux,
c'est avancer de 1 et monter de $\dfrac{N}{D}$
(pareil avec descendre)



Avancer de 3 et monter de 2, c'est avancer de 1 et monter de $\dfrac{2}{3}$
donc $a = \dfrac{2}{3}$.

- Si on me donne les images de deux antécédents $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$:
  1) Je calcule a avec le taux de variation $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.
  2) Je calcule b par équation avec la valeur de a et $f(x_1) = y_1$ (ou avec $f(x_2) = y_2$).

Remarque : Une fois qu'on a les valeurs de a et de b , on peut donner l'expression $ax + b$ de $f(x)$ en fonction de x .

- **Justifier que deux droites représentant des fonctions affines sont parallèles ou non**
  - Si les deux coefficients directeurs sont égaux, alors les droites sont parallèles.
    Sinon, les droites ne sont pas parallèles.

- **Représenter graphiquement une fonction affine**
  - Si les coefficients a et b sont simples :
    1) Je place b sur l'axe des ordonnées et ça me donne un premier point.
    2) J'utilise a et la méthode des escaliers pour placer quelques autres points.
  - Sinon, je "calcule" deux points :
    1) Je choisis une abscisse x_1 présente dans la fenêtre du graphique.
       Je calcule $f(x_1)$.
       Je place le point de coordonnées $(x_1 ; f(x_1))$.
    2) Je recommence avec une autre abscisse x_2 .

- **Utiliser des fonctions affines dans des situations concrètes**

Remarques sur les exercices

- Les exercices ① et ② demandent de reconnaître des fonctions affines et, si c'est le cas, de déterminer les coefficients.
  Mais soit à partir de l'expression, soit à partir de la représentation graphique.
- L'exercice ③ consiste à calculer les coefficients d'une fonction affine.
- L'exercice ④ travaille la construction de droites représentant des fonctions affines (il faudra imprimer les pages 3 et 4).
- Les exercices suivants sont des situations concrètes.

---

① Les fonctions suivantes sont-elles affines et si oui, préciser la valeur du coefficient directeur et de l'ordonnée à l'origine.

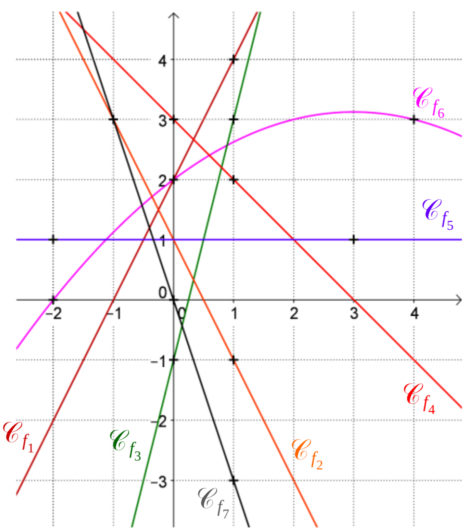
$f_1 : x \mapsto -5x + 11$; $f_2 : x \mapsto 2{,}9 + 0{,}1x$; $f_3 : x \mapsto \dfrac{x}{3} + \dfrac{2}{7}$; $f_4 : x \mapsto x^2 - 1$; $f_5 : x \mapsto 2 - 3x$; $f_6 : x \mapsto \dfrac{5}{x} + 4$;

$f_7 : x \mapsto 7x$; $f_8 : x \mapsto 520$; $f_9 : x \mapsto 2(x + 4)$; $f_{10} : x \mapsto (3x + 4)^2$; $f_{11} : x \mapsto -x$; $f_{12} : x \mapsto \dfrac{6x + 5}{3}$.

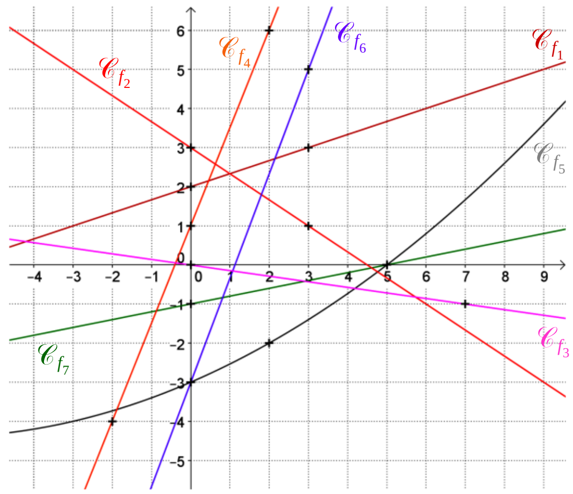
---

② Pour chaque question, on a représenté les droites représentant des fonctions.
Dire si elles sont affines ou non.
Si elles le sont, préciser l'expression de la fonction en fonction de la variable x .

1.

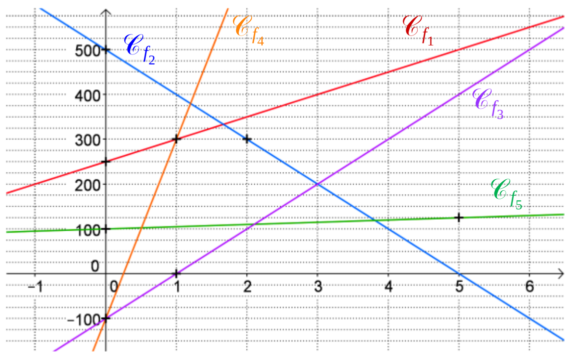


2.

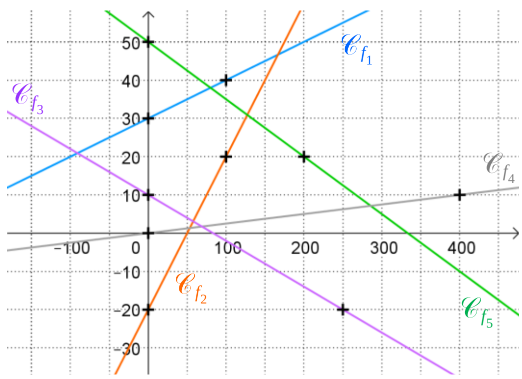


Les droites $\mathscr{C}_{f_4}$ et $\mathscr{C}_{f_6}$ sont-elles parallèles ? Justifier.

3.



4.



③ Les exercices **1.** à **6.** sont indépendants.

1. On donne une fonction f affine telle que $f(15) = 25$ et $f(21) = 43$.

a. Calculer a, le coefficient directeur de f.

b. Calculer b, l'ordonnée à l'origine de f.

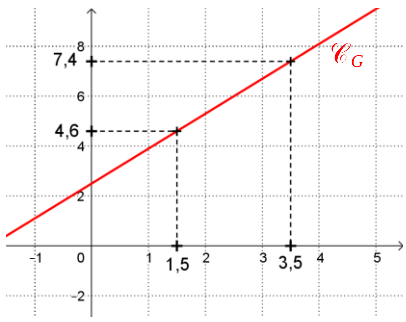
c. En déduire l'expression de $f(x)$.

2. On donne une fonction g affine telle que $g(10) = -43$ et $g(-3) = 22$.
Déterminer l'expression de $g(x)$.

3. On donne une fonction h affine telle que $h(50) = 16$ et $h(8) = 1{,}3$.
Déterminer l'expression de $h(x)$.

4. On donne une fonction F affine telle que $F(6) = 104$ et $F(60) = 140$.
Déterminer l'expression de $F(x)$.

5. On a représenté ci-contre la fonction G affine.
Déterminer l'expression de $G(x)$.



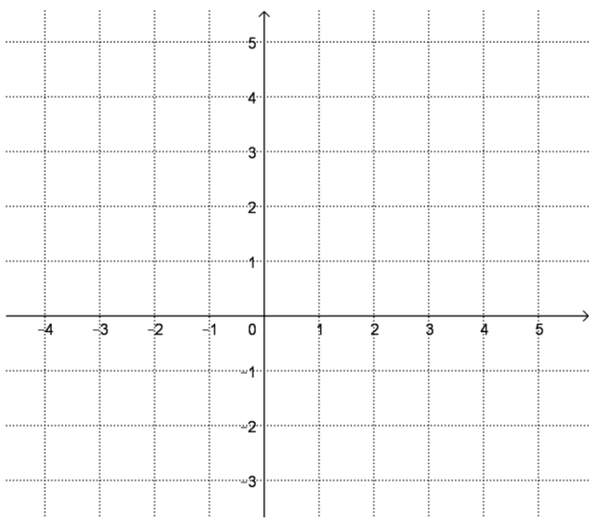
6. Déterminer l'expression de la fonction affine φ dont la représentation graphique est la droite qui passe par les points $M(5\,;-70)$ et $N(-10\,;275)$.

④ **1.** Sans faire de calcul, construire les droites (d_1), (d_2), ... (d_6) les représentations graphiques respectives de f_1, f_2, ... f_6.

$f_1 : x \mapsto 2x - 3$; $f_2 : x \mapsto -3x + 5$;

$f_3 : x \mapsto 0{,}5x + 2$; $f_4 : x \mapsto 4$;

$f_5 : x \mapsto -\dfrac{1}{3}x - 2$; $f_6 : x \mapsto \dfrac{2x}{3} - 1$.

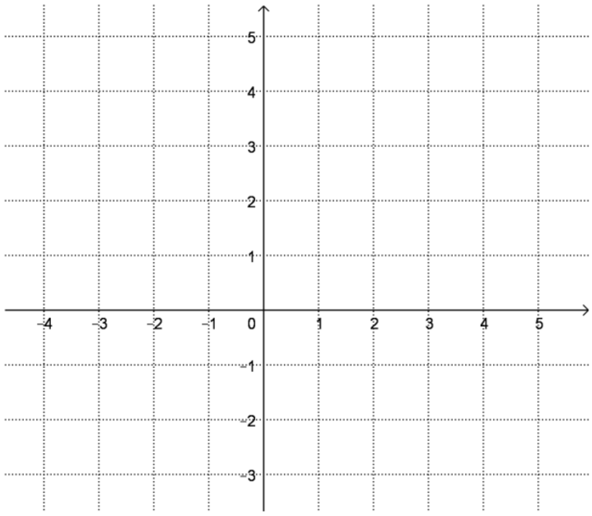


2. Même exercice que le **1.** mais en calculant les coordonnées de deux points.

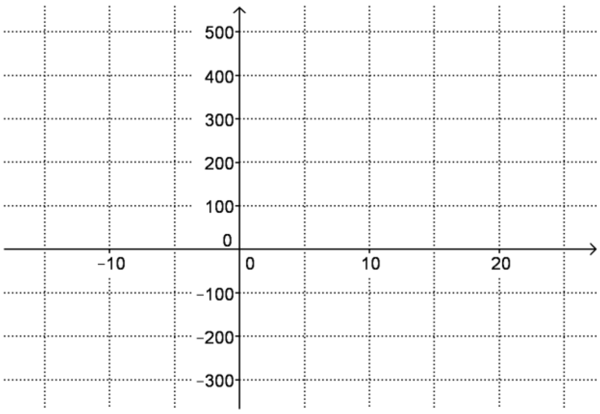
$f_1 : x \mapsto 3x + 10$; $f_2 : x \mapsto -2x + 11$;

$f_3 : x \mapsto 0{,}5x + 6$; $f_4 : x \mapsto 0{,}5x - 4{,}5$;

$f_5 : x \mapsto \dfrac{1}{3}x + \dfrac{8}{3}$; $f_6 : x \mapsto -\dfrac{x}{7} - \dfrac{2}{7}$.



3.



Construire $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$, $\mathscr{C}_h$ et $\mathscr{C}_k$ les représentations graphiques des fonctions f , g , h et k telles que :

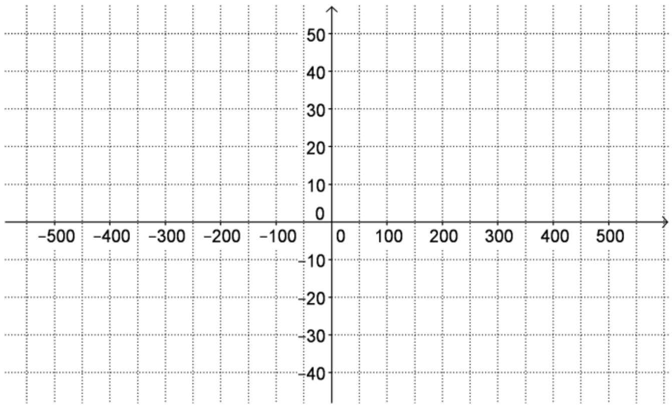
$f(x) = 10x + 100$; $g(x) = -10x + 400$;

$h(x) = 50x - 200$; $k(x) = -8x + 20$.

4. Même exercice que le **3.** avec :

$f(x) = 0{,}1x - 20$; $g(x) = -0{,}2x + 40$;

$h(x) = 0{,}075x + 10$; $k(x) = -0{,}06x + 22$.



---

⑤ Dans une région, on modélise les dépenses de consommation des ménages pour l'habitation par deux fonctions affines :

- E telle que $E(t) = at + b$ représente la consommation en énergie en milliards d'euros,
- L telle que $L(t) = ct + d$ représente la location de logement en milliards d'euros,
- t représente le nombre d'années après 2000.

On donne les informations suivantes :

- Les dépenses pour l'énergie ont été de 62,59 milliards d'euros en 2007 et 55,47 milliards d'euros en 2015.
- Les dépenses pour la location ont été de 201,46 milliards d'euros en 2011 et 235,2 milliards d'euros en 2018.

a) Traduire les informations données sous la forme $E(...) = ...$ et $L(...) = ...$.

b) Déterminer l'expression des fonctions E et L .

c) En déduire une estimation de la dépense totale en énergie et pour la location en 2025.

---

⑥ On réchauffe régulièrement une quantité d'azote liquide à une température initiale de –170°C.
La température θ , en °C, augmente de manière affine en fonction du temps t en secondes.
Au bout de 1 minute 20 secondes, elle vaut –100°C.

a) Exprimer $\theta(t)$ en fonction de t .

b) En déduite la température au bout de 2 minutes 40 secondes.