Savoir CALCULER UNE PROBABILITÉ DANS UNE EXPÉRIENCE À DEUX ÉPREUVES OU PLUS

Ce qu'il faut avoir compris

• Une expérience à deux épreuves

- Il s'agit d'une **expérience aléatoire** composé de deux actions (les **épreuves**) qui ont plusieurs résultats dus au hasard.
- Les deux épreuves peuvent être faites **simultanément**, c'est-à-dire en même temps.

  Exemples : Le lancer simultané de deux dés cubiques,
  le lancer simultané d'un dé cubique et d'un dé tétraédrique,
  le tirage au hasard de deux jetons en même temps dans une urne.

- Les deux épreuves peuvent être faites **successivement**, c'est-à-dire l'une après l'autre.

  Exemples : Le lancer d'un 1er dé puis le lancer d'un 2ème dé,
  le lancer d'un dé puis le tirage au hasard d'un jeton dans une urne,
  le tirage au hasard d'un 1er jeton dans une 1ère urne, puis d'un 2ème jeton dans une 2ème urne.
  le tirage au hasard d'un 1er jeton dans une urne, puis d'un 2ème jeton dans la même urne.

- Si les deux épreuves successives sont la même épreuve, on dit qu'on a la **répétition d'une épreuve**.

  Exemples : Le lancer d'un dé, puis le lancer du même dé,
  tourner une roue une 1ère fois, puis la tourner une 2ème fois.

- ⚠ Dans le cas de deux tirages successifs dans la même urne, il y a deux situations à ne pas confondre :

  - le **tirage avec remise** : après le 1er tirage, on remet le 1er jeton dans l'urne.
    Cela signifie que l'urne est dans le même état avant le 1er tirage et avant le 2ème tirage.
    On a alors une répétition de la même épreuve.

  - le **tirage sans remise** : après le 1er tirage, on ne remet le 1er jeton dans l'urne.
    L'urne n'est pas dans le même état avant le 1er tirage et avant le 2ème tirage puisqu'il manque un jeton.
    On n'a donc pas une répétition de la même épreuve.

- *Remarque* : On verra des exemples avec plus de deux épreuves.

• Les issues d'une expérience à deux épreuves

- Pour une expérience à deux épreuves successives, **les issues sont des couples équiprobables**.

  Exemple 1 : Pour le lancer d'un 1er dé puis le lancer d'un 2ème dé, l'univers est composé de 36 couples :
  $\{ (1;1);(1;2);(1;3);\dots;(1;6);(2;1);(2;2);\dots;(2;6);\dots;(6;6) \}$.
  où, dans chaque couple $(a;b)$, a désigne le résultat du 1er dé et b le résultat du 2ème dé.

- Pour une expérience à deux épreuves simultanées, c'est plus compliqué...

  Exemple 2 : Si on lance simultanément un dé bleu et un dé rouge, on pourra différencier les deux résultats dans des couples $(a;b)$ équiprobables, où a désigne le résultat du dé bleu et b le résultat du dé rouge.
  On voit donc que c'est une expérience équivalente aux lancers successifs du dé bleu puis du dé rouge.

  Exemple 3 : Si on lance simultanément deux dés blancs identiques, on ne pourra plus différencier les deux résultats.
  C'est la catastrophe car les issues ne sont plus ordonnées. Et surtout plus équiprobables.
  Comme on va le voir, l'issue « *faire 1 et 2* » est deux fois plus probable que l'issue « *faire 1 et 1* »...

  On se ramène alors à deux épreuves simultanées distinctes pour former un univers de couples équiprobables.
  Puis on groupe les couples pour en faire des issues non équiprobables.

  Exemple 3 : On décide qu'il y a un dé blanc n°1 et un dé blanc n°2 pour se ramener à l'exemple 1.
  Alors, l'issue « *faire 1 et 2* » est transformée en l'évènement $\{ (1;2);(2;1) \}$
  et l'issue « *faire 1 et 1* » est transformée en l'évènement $\{ (1;1) \}$.
  Et on voit bien mieux pourquoi l'un est deux fois plus probable que l'autre.

  Exemple 4 : De même, le tirage simultané deux jetons dans une même urne se ramène à deux tirages successifs, mais attention, sans remise.

- *Remarque* : Pour une expérience à trois épreuves, **les issues sont des triplets équiprobables**.

  Exemple 5 : Pour le lancer d'un 1er dé, d'un 2ème dé et d'un 3ème dé, l'univers est composé de 216 triplets :
  $\{ (1;1;1);(1;1;2);\dots;(1;2;1);\dots;(6;6;6) \}$.
  où, dans chaque triplet $(a;b;c)$, a, b et c désignent les résultats du 1er, du 2ème et du 3ème dé.

- **Les évènements**

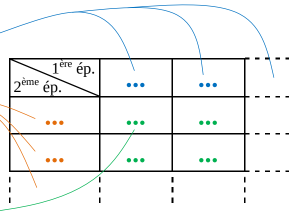
  - Un évènement sera encore un groupement de plusieurs couples-issues équiprobables.
  - Sa formulation demandera une certaine **observation**.

    Exemple 1 : Avec les lancers de deux dés, on peut demander d'observer :
    - la somme des deux valeurs,
    - la plus grande des deux valeurs,
    - si les deux valeurs sont égales ou non,
    - si la 1ère valeur est supérieure à la 2ème ou non, etc...

Ce qu'il faut savoir faire

- **Calculer la probabilité d'un évènement dans une expérience à deux épreuves**

  - **Méthode 1 : le tableau à double entrée** (ou **tableau croisé**)



    1) Repérer les issues équiprobables de la 1ère épreuve et les mettre en ligne.
    2) Repérer les issues équiprobables de la 2ème épreuve et les mettre en colonne.
    3) Chaque couple-issue correspond à une case. Remplir les cases du tableau avec l'observation de l'évènement.

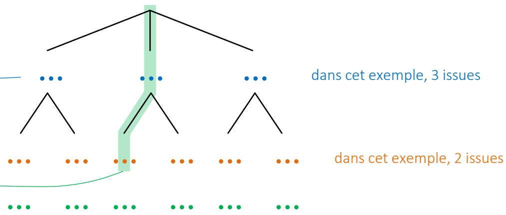
       Exemple 1 : Avec les lancers de deux dés, on peut remplir les cases avec :
       - la somme des deux valeurs,
       - la plus grande des deux valeurs,
       - *oui* si les deux valeurs sont égales, *non* sinon,
       - *oui* si la 1ère valeur est supérieure à la 2ème, *non* sinon, etc...

       ⚠ Dans le cas de deux tirages successifs **sans remise**, les cases de la diagonale sont interdites (puisqu'un objet ne peut être pioché deux fois de suite s'il n'a pas été remis dans l'urne).

    4) Rédiger le nombre total de couples équiprobables (les cases et le nombre de couples favorables à l'évènement.

       La probabilité de l'évènement sera le quotient $\dfrac{\textit{nombre de cases favorables}}{\textit{nombre total de cases}}$.

  - **Méthode 2 : l'arbre des possibles**



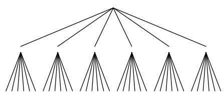
    1) Repérer les issues équiprobables de la 1ère épreuve et les répartir en branches.
    2) Repérer les issues équiprobables de la 2ème épreuve et les répartir en branches à la suite de chaque branche de la 1ère épreuve.
    3) Chaque couple-issue correspond à un chemin. Selon l'évènement, on peut ajouter l'observation à faire.

       Exemple 1 : Avec les lancers de deux dés, on peut ajouter la somme des deux valeurs, la plus grande des deux valeurs, une coche ✓ si les deux valeurs sont égales, etc...

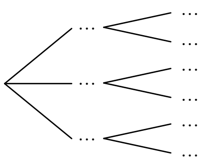
    4) Compter le nombre total de chemins et le nombre de chemins favorables à l'évènement.

       La probabilité de l'évènement sera le quotient $\dfrac{\textit{nombre de chemins favorables}}{\textit{nombre total de chemins}}$.

    Remarque : S'il y a beaucoup d'issues, on peut avoir des arbres pénibles à faire...



    Remarque : On peut disposer l'arbre de gauche à droite :

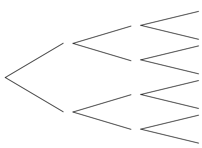


- **Calculer la probabilité d'un évènement dans une expérience à trois épreuves ou plus**

  ⚠ Pour utiliser la méthode du tableau, il faudrait un **tableau à triple entrée**, mais c'est **impossible à réaliser** !

  - **Seule méthode : l'arbre des possibles**

    Mêmes étapes mais l'arbre à plus de deux niveaux de branches.
    Il vaut mieux le disposer de droite à gauche :



Remarques sur les exercices

Pour chaque situation, testez les deux méthodes, celle du tableau à double entrée et celle de l'arbre des possibles.
Apprenez ainsi à choisir la meilleure des deux méthodes le jour de l'évaluation...

---

① On lance en même temps deux dés cubiques non truqués.

a. Déterminer la probabilité que la somme des faces soit entre 5 et 10 inclus.

b. Déterminer la probabilité que le produit des faces soit entre 5 et 10 inclus.

c. Déterminer la probabilité que l'écart entre les faces soit égal à 1 ou 2.

d. Déterminer la probabilité que les faces soient différentes mais de même parité.

---

② On lance un dé cubique et un dé tétraédrique non truqués.

a. Déterminer la probabilité que la somme des faces soit entre 5 et 10 inclus.

b. Déterminer la probabilité que l'écart entre les faces soit égal à 1 ou 2.

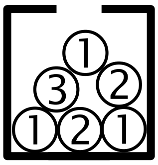
c. Déterminer la probabilité que les valeurs des deux dés soient de même parité.

d. Déterminer la probabilité que la valeur du dé cubique soit double de la valeur du dé tétraédrique.

e. Déterminer la probabilité que la valeur du dé tétraédrique soit plus grande que la valeur du dé cubique.

---

③ Je lance un dé à trois faces (si, si, ça existe ! Ce sont des prismes dont les bases triangulaires ont été arrondies).
Puis je pioche une boule dans l'urne :



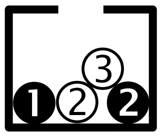
a. Déterminer la probabilité de l'évènement A : Avoir deux fois le chiffre 2.

b. Déterminer la probabilité de l'évènement B : Avoir deux valeurs impaires.

c. Déterminer la probabilité de l'évènement C : Avoir deux fois le même chiffre.

---

④ On pioche au hasard deux boules dans l'urne ci-contre :



1. On pioche au hasard deux boules en même temps dans l'urne ci-contre :

a. Déterminer la probabilité de l'évènement A : Avoir deux fois le même chiffre.

b. Déterminer la probabilité de l'évènement B : Avoir deux fois la même couleur.

2. Mêmes questions si on pioche au hasard trois boules en même temps.

---

⑤ Je lance une pièce de monnaie quatre fois de suite.

a. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux fois *pile* ?

b. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins deux fois *pile* ?

---

⑥ Dans une urne, on a placé trois boules noires et deux boules blanches indiscernables au toucher.

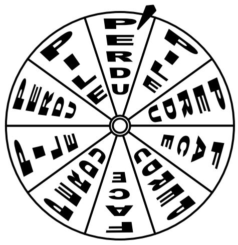
1. On pioche une première boule que l'on replace dans l'urne.
On pioche une deuxième boule.

a. Déterminer la probabilité que les boules soient de la même couleur.

b. Déterminer la probabilité que la première boule soit noire et la deuxième soit blanche.

2. Déterminer la probabilité que les boules soient de la même couleur si on pioche deux boules en même temps.

⑦ On lance une pièce de monnaie puis on tourne la roue ci-contre.



1. *Premier jeu* :
On gagne si on obtient la même valeur avec la pièce qu'avec la roue.
Le vendeur de billet annonce qu'on a une chance sur deux de gagner car il y a cinq PERDU sur dix.
Est-ce vrai ? Si non, quelle est la probabilité de gagner ?

2. *Deuxième jeu* :
On mise 5 € pour jouer.
Avec la pièce :
- si on fait PILE, on gagne 3 €,
- si on fait FACE, on gagne 4 €.

Puis avec la roue :
- si on fait PILE, on multiplie le gain de la pièce par 2,
- si on fait FACE, on ajoute 2 € au gain de la pièce,
- si on fait PERDU, il ne se passe rien de plus.

Quelle est la probabilité de gagner ?

---

⑧ Dans une urne A, on a placé les boules suivantes 2 3 3 3 4 4, indiscernables au toucher.
Dans une urne B, on a placé les boules suivantes 3 3 4 4 5, indiscernables au toucher.
On pioche en même temps une boule dans chaque urne.

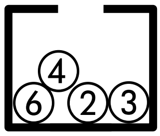
a. Déterminer la probabilité que les boules aient la même valeur.

b. Déterminer la probabilité que la somme des valeurs dépasse 7 .

---

⑨ On pioche au hasard trois boules successives dans l'urne ci-contre sans les remettre.

Déterminer la probabilité d'avoir obtenu le 2 avant le 3 ou le 4 avant le 6.



---

⑩ À une course de natation se présentent les nageurs suivants :

Oliver Smith
Hitochi Kojima
Yann Fichot
Simon Leclercq
James Barton
Louis Lapointe
Mickael Wilson

On considère qu'ils ont tous la même chance de gagner.

a. Déterminer la probabilité que les deux premiers au classement soient français.

b. Déterminer la probabilité que les deux premiers au classement soient français ou américains.

c. Déterminer la probabilité qu'un Japonais soit dans une des deux premières places mais pas un Britannique.

---

⑪ Une grille de bataille navale comporte dix lignes numérotées de 1 à 10 et dix colonnes numérotées de A à J.
Sur une grille, on dispose un porte-avion de 4 cases, un croiseur de 3 cases, deux sous-marins de 2 cases et un torpilleur de 1 case.
Les bateaux ne peuvent toucher les bords de la grille et ne peuvent pas se toucher, ni par un côté, ni par un sommet.

a. Déterminer la probabilité que le premier coup de la partie touche le porte-avion.

b. Déterminer la probabilité que le premier coup de la partie touche un bateau.

c. On dit qu'un bateau est en danger lorsque le coup porte sur une case qui le touche, soit par un côté, soit par un sommet.
Déterminer la probabilité que le premier coup de la partie mette en danger le porte-avion.

d. On considère l'évènement M : *Le premier coup de la partie met en danger le porte-avion ou le torpilleur.*
Déterminer toutes les probabilités possibles de M en fonction de la position du porte-avion et du torpilleur.

⑫ Un électricien possède deux boîtes de vis.
Dans la première, il y a 40 vis à bout rond et 60 vis à bout plat.
Dans la deuxième il y a 38 vis à bout rond et 12 vis à bout plat.

Il prend au hasard une vis dans la première boîte puis une vis dans la deuxième boîte.

Quelle est la probabilité d'obtenir deux vis différentes.