# Savoir DÉMONTRER AVEC DES VECTEURS

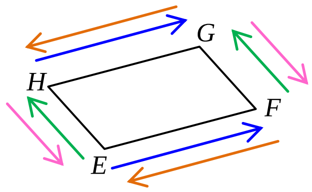
*Ce qu'il faut savoir* :

- **Les enchaînements d'une cause géométrique à une conséquence vectorielle**

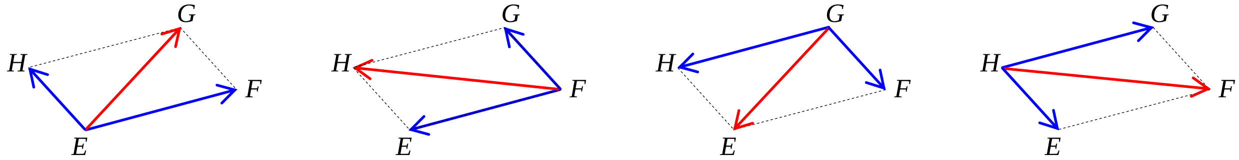
  - Si $A'$ est le **translaté** de $A$ suivant le vecteur $\overrightarrow{u}$, alors $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{u}$.

  - Si $EFGH$ **parallélogramme**,

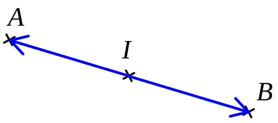
    alors $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$
    ou alors $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{GH}$
    ou alors $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG}$
    ou alors $\overrightarrow{HE} = \overrightarrow{GF}$
    } *égalités vectorielles simples*



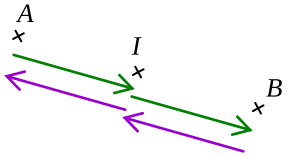

    alors $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{EG}$
    ou alors $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FH}$
    ou alors $\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{GE}$
    ou alors $\overrightarrow{HE} + \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{HF}$
    } *égalités de sommes vectorielles*




  - Si $I$ **milieu** de $[AB]$,

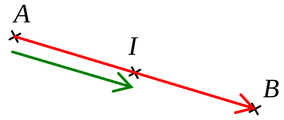



    alors $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$
    ou alors $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IA}$
    } *égalités vectorielles simples*




    alors $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$ } *égalité de somme vectorielle*

    alors $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}$
    ou alors $\overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{AI}$
    } *égalités avec des produits de vecteur par un nombre*

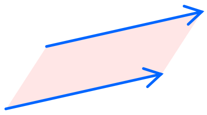



  *Remarque* : Les parallélogrammes (et donc les rectangles, les losanges et les carrés !) et les milieux (et donc les centres de symétrie !) sont des fournisseurs d'égalités vectorielles. Très nombreuses...
  Votre principale difficulté dans les démonstrations sera de choisir la bonne égalité.

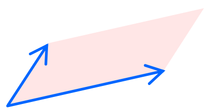
- **Les enchaînements d'une cause vectorielle à une conséquence géométrique**

  Tous les enchaînements réciproques des précédents :

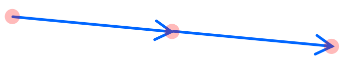
  - **Deux vecteurs égaux** vous donnent un **parallélogramme**.



  - **Une somme de deux vecteurs de même origine** vous donne un **parallélogramme**.

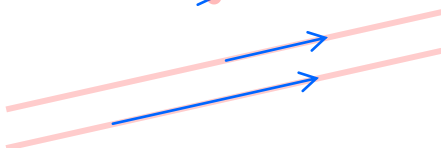


  - **Deux vecteurs consécutifs égaux** vous donnent un **milieu**.

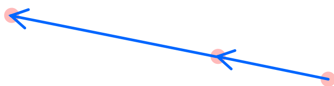


  Plus les enchaînements partant d'une colinéarité :

  - **Deux vecteurs colinéaires** vous donnent **deux droites parallèles**.



  - **Deux vecteurs consécutifs colinéaires** vous donnent **trois points alignés**.



    *Remarque* : Il y a ici beaucoup de vecteurs colinéaires possibles...

  *Remarque* : Rappelons que la colinéarité de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ signifie qu'ils ont la même direction.
  Et cela arrive lorsque l'un est égal à l'autre multiplié par un nombre non nul.
  Rappelons aussi que si $\overrightarrow{u} = k\,\overrightarrow{v}$ avec $k \in \mathbb{R}^*$, alors $\overrightarrow{v} = \frac{1}{k}\,\overrightarrow{u}$.

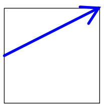
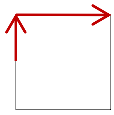
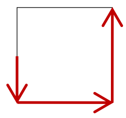
- **Les règles de calcul vectoriel**
  - La relation de Chasles dans un sens vous permet de réduire une somme : $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$ ,
    et la relation de Chasles dans l'autre sens vous permet de décomposer : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$ .
  - On ne s'embête pas avec des soustractions ou des opposés ! ... $- \overrightarrow{MN}$ s'écrit ... $+ \overrightarrow{NM}$ .
  - On peut développer $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$ ,
    et on peut factoriser $a\vec{u} + a\vec{v} = a(\vec{u} + \vec{v})$ .

*Ce qu'il faut savoir faire* :

- **Faire une démonstration de géométrie plane avec des vecteurs**
  - **Méthode** : 1) Repérer **ce qu'il faut démontrer** ❶,
    qui sera votre **dernière conséquence** en bas de votre démonstration.
    2) Voir quelle **cause vectorielle** ❷ pourrait donner ❶.
    3) Lister les **données de l'énoncé** ❸,
    vos **premières causes géométriques** en haut de votre démonstration.
    4) Voir comment transformer ❸ en **conséquences vectorielles** ❹.
    5) Trouver comment faire la **jonction** ❺ de ❹ jusqu'à ❷.

❸
donc ❹
donc ... ⎫
⋮ ⎬ ❺
donc ❷
donc ❶

  - *Remarque* : L'étape 4) est souvent délicate car on a en général beaucoup d'écritures vectorielles possibles pour ❹.
    C'est pourquoi il faut d'abord avoir trouvé ❷. Cela vous guidera dans votre choix.
  - *Remarque* : Retenez un procédé de démonstration très simple et très utile :
    Si $\vec{u} = \vec{v}$ et $\vec{v} = \vec{w}$ , alors $\vec{u} = \vec{w}$ .

- **Faire une démonstration avec du calcul vectoriel**
  - Il s'agit généralement de démontrer une égalité vectorielle en utilisant les règles de calcul et, souvent, des données géométriques.
  - **Méthode 1** : Avec une somme un peu longue, cherchez à réduire avec la relation de Chasles.
  - **Méthode 2** : Au contraire, utilisez la relation de Chasles pour créer un parcours qui fait apparaître des vecteurs intéressants, avec lesquels vous pourrez appliquer des informations de l'énoncé.
    Ainsi, un vecteur "traversant une figure" :  peut devenir une somme de vecteurs "longeant la figure" :  ou même : 
  - **Méthode 3** : N'oubliez pas les transformations dues aux propriétés géométriques (voir page précédente) :
    $\overrightarrow{EF}$ devient $\overrightarrow{HG}$ avec un parallélogramme $EFGH$ ;
    $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH}$ se réduit en $\overrightarrow{EG}$ avec un parallélogramme $EFGH$ ;
    $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}$ se réduit en $\vec{0}$ avec un milieu $I$ de $[AB]$ .

*Remarques sur les exercices*

- L'exercice ① est une petite préparation.
- Les exercices ② à ⑮ sont des démonstrations de géométrie plane.
  À partir de l'exercice ⑧, vous trouverez des sommes de vecteurs.
  À partir de l'exercice ⑪, vous trouverez des produits de vecteurs par des nombres réels.

  Attention, il y aura parfois un peu de calcul vectoriel à faire dès l'exercice ⑫.
- Les exercices ⑯ à ㉑ sont des démonstrations d'égalités vectorielles (avec encore quelques propriétés géométriques).

---

① **1.** Pour chaque situation géométrique, écrire toutes les égalités vectorielles possibles du type $\overrightarrow{..} = \overrightarrow{..}$ :

**a.** $EFGH$ parallélogramme. **b.** $J$ milieu de $[RS]$ .

**c.** $RSTU$ rectangle. **d.** $\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{LM}$

**e.** $A$ symétrique de $B$ par rapport à $C$ .

**2.** Pour chaque donnée vectorielle, donner la conséquence géométrique :

**a.** $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{EF}$ **b.** $\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{AR}$ **c.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ **d.** $\overrightarrow{DM} + \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DC}$ **e.** $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{ST} = \overrightarrow{AB}$

**f.** $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{GH}$ **g.** $\overrightarrow{RS} = 2\,\overrightarrow{JK}$ **h.** $\overrightarrow{OL} = 3\,\overrightarrow{OM}$ **i.** $\overrightarrow{AM} = 2\,\overrightarrow{AE}$

---

② Soit $RSTU$ un rectangle et $STAB$ un losange.
Démontrer que $RBAU$ est un parallélogramme.

---

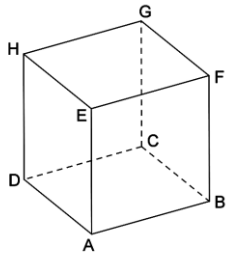
③ On donne un carré $EFGH$ et un point $M$ symétrique de $E$ par rapport à $F$.
Démontrer que $FMGH$ est un parallélogramme.

---

④ Soit un triangle $ABC$.
Soit les points $F$ translaté de $C$ suivant le vecteur $\overrightarrow{AB}$ et $G$ translaté de $A$ suivant le vecteur $\overrightarrow{CB}$.
Démontrer que $B$ est le milieu de $[FG]$.

---

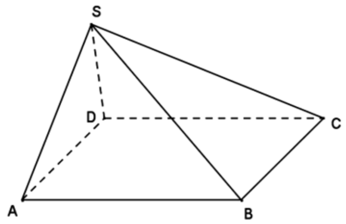
⑤ Soit un cube $ABCDEFGH$.
Démontrer que $ACGE$ est un parallélogramme.
Que peut-on en déduire des droites $(AC)$ et $(EG)$ ?




---

⑥ On donne une pyramide $SABCD$ à base $ABCD$ carrée.
On définit les points $C'$ et $D'$ symétriques respectifs de $C$ et $D$ par rapport à $S$.

Démontrer que $ABD'C'$ est un parallélogramme.



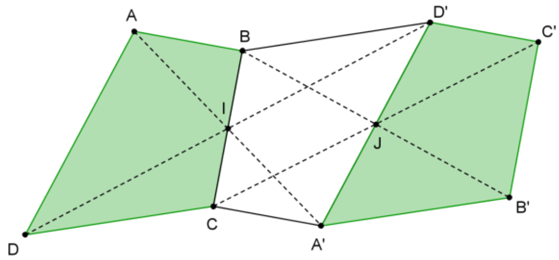

---

⑦ On considère un quadrilatère quelconque $ABCD$.

On nomme $I$ le milieu du côté $[BC]$ et on construit $A'$ et $D'$ symétriques respectifs de $A$ et $D$ par rapport à $I$.

On nomme alors $J$ le milieu du côté $[A'D']$ et on construit $B'$ et $C'$ symétriques respectifs de $B$ et $C$ par rapport à $J$.

En observant la figure faite, on remarque que le troisième quadrilatère obtenu $A'B'C'D'$ semble être le translaté du premier.



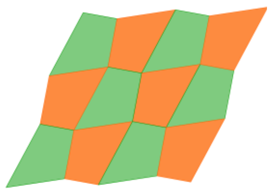

C'est ce que nous allons prouver en démontrant que les quatre vecteurs $\overrightarrow{AD'}$, $\overrightarrow{BC'}$, $\overrightarrow{CB'}$ et $\overrightarrow{DA'}$ sont égaux.

**1.** Démontrer que $\overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{DA'}$.

**2.** Démontrer que $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{CB'}$.

**3.** Démontrer que $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BD'}$ et que $\overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{A'B'}$.
En déduire que $\overrightarrow{CB'} = \overrightarrow{DA'}$.

**4.** Conclure proprement.



*Remarque* : Ce procédé de construction permet de « paver » le plan...

---

⑧ Soit un parallélogramme $RSTU$.
On pose le point $M$ tel que $\overrightarrow{TM} = \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{RU}$.

Démontrer que $T$ est le milieu de $[RM]$.

⑨ Soit un triangle $ABC$ rectangle en $B$.
On définit les points $R$ et $S$ tels que $\overrightarrow{BR} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CS} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$.

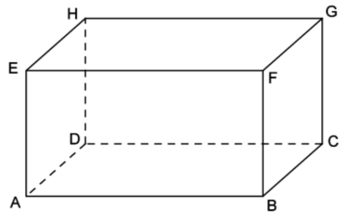
**1.** Démontrer que $ABCR$ est un rectangle.

**2.** Démontrer que $A$ est le milieu de $[RS]$.

⑩ $ABCDEFGH$ est un pavé droit.

**1.** Démontrer que $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DC}$.

**2.** En déduire que $\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EC}$ puis la nature de $CDEF$.




⑪ Soit un parallélogramme $ABCD$.
On pose les points $M$ symétrique de $D$ par rapport à $A$ et $N$ symétrique de $B$ par rapport à $C$.

**1.** Démontrer que $AMCN$ est un parallélogramme.

**2.** Démontrer que $DMBN$ est un parallélogramme.

⑫ Dans un triangle $RST$, on pose $A$ et $B$ tels que $\overrightarrow{RA} = 5\,\overrightarrow{RT}$ et $\overrightarrow{RB} = 5\,\overrightarrow{RS}$.

Démontrer que $(AB) // (ST)$.

⑬ Dans un triangle $RST$, on pose $A$ et $B$ tels que $\overrightarrow{RA} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{RT}$ et $\overrightarrow{RB} = 3\,\overrightarrow{RS}$.

Démontrer que $(BT) // (SA)$.

⑭ *Le théorème de la droite des milieux, que vous avez vu en 4$^{ème}$, disait ceci :*

> ***Dans un triangle** $ABC$**, si** $I$ **est le milieu de** $[AB]$ **et** $J$ **est le milieu de** $[AC]$**,***
> ***alors** $(IJ) // (BC)$ et $IJ = \frac{1}{2} BC$.*

*Vous allez démontrer ce théorème en vous servant de vecteurs.*

Étant donné un triangle $ABC$, on pose $I$ et $J$ les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$.

**1.** Démontrer que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{BC}$.

**2.** En déduire les deux résultats du théorème de la droite des milieux..

⑮ $ABCD$ est un parallélogramme.
Soit $I$ et $J$ tels que $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\,\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = 3\,\overrightarrow{AD}$.

Démontrer que $I$, $C$ et $J$ sont alignés.

⑯ Étant donnés cinq points $A$, $B$, $C$, $D$ et $E$, démontrer que :

$$2\,\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{EB} - 2\,\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AE}.$$

⑰ Soit un quadrilatère quelconque $ABCD$.

Démontrer que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

⑱ Soit un triangle $ABC$ et $I$ le milieu de $[BC]$.

Démontrer que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{AI}$.

⑲ On donne un parallélogramme $ABCD$ de centre $O$.
On définit le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BC} + 2\,\overrightarrow{BA}$.

Démontrer que $\vec{u} = \overrightarrow{BD}$.

⑳ Soit un parallélogramme $ABCD$.
Démontrer que, pour tout point $M$ du plan, on a $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{DM} = 4\,\overrightarrow{AM} + 2\,\overrightarrow{CA}$.

㉑ Dans un triangle $ABC$, on pose $I$, $J$ et $K$ les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.
Démontrer que $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{CK} = \vec{0}$.