Savoir CALCULER AVEC DES RACINES CARRÉES

Ce que je dois savoir

- **La définition**

  - Si a est strictement positif, il y a deux nombres dont le carré vaut a, un qui est positif et l'autre qui est l'opposé. Celui qui est positif s'appelle la **racine carrée de** a.

    Exemple : Il y a deux nombres dont le carré vaut 25, ce sont $\begin{cases} 5 \text{ qui est positif et qui est } \sqrt{25} \\ -5 \text{ qui est négatif et qui vaut } -\sqrt{25} \end{cases}$.

  - Si a est nul, il y a un seul nombre dont le carré vaut a, c'est 0.
    Donc $\sqrt{0} = 0$.

  - Si a est strictement négatif, il n'y a pas de nombre dont le carré vaut a et alors a n'a pas de racine carrée.

- **Les formules**

  Pour tous a et b positifs (et b non nul si besoin),

  - les deux formules qui permettent à une racine carrée et un carré de s'éliminer :

    $\sqrt{\boldsymbol{a}^2} = \boldsymbol{a}$ (attention, c'est faux si a est négatif !) • $(\sqrt{\boldsymbol{a}})^2 = \boldsymbol{a}$

    Remarque : On peut écrire $\sqrt{x^2} = |x|$ pour x de signe quelconque.

  - $\sqrt{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}} = \sqrt{\boldsymbol{a}} \times \sqrt{\boldsymbol{b}}$ • $\sqrt{\dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}} = \dfrac{\sqrt{\boldsymbol{a}}}{\sqrt{\boldsymbol{b}}}$ et en particulier $\sqrt{\dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{b}}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{b}}}$

  ⚠ Pas de formule simple avec $\sqrt{a+b}$ et $\sqrt{a-b}$, ou $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ ...

Ce qu'il faut savoir faire :

- **Calculer une expression numérique avec des racines carrées**

  - J'ai deux formules qui permettent d'éliminer une racine carrée au contact d'un carré (par exemple $(\sqrt{65})^2 = 65$ et $\sqrt{65^2} = 65$, mais attention, $\sqrt{(-65)^2}$ ne fait pas -65 !).
    Et je n'oublie pas la liste des carrés parfaits, de 1 à 144, ou même jusqu'à 225.

- **Résoudre une "équation carré"** $\boldsymbol{x^2 = a}$

  - Si a est strictement positif : $x^2 = a \Leftrightarrow x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$, et donc $\mathscr{S} = \{ \sqrt{a} ; -\sqrt{a} \}$.
    Mais avant de conclure, simplifiez votre racine (voir ci-dessous).

    Remarque : Il peut arriver qu'on ne garde que la solution positive, mais seulement si on sait à l'avance que notre inconnue est positive (par exemple si c'est une longueur, ou dans un problème concret).

  - Si a est nul : $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$, et donc $\mathscr{S} = \{ 0 \}$.

  - Si a est strictement négatif, c'est impossible et $\mathscr{S} = \varnothing$.

- **Simplifier une racine carrée** (écrire sous la forme $a\sqrt{b}$, avec a et b entiers et b le plus petit possible)

  - Par exemple, $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.
    En effet :
    - je décompose $\sqrt{20}$ en faisant apparaître les carrés $\sqrt{2^2 \times 5}$,
    - puis en $\sqrt{2^2} \times \sqrt{5}$ grâce à la formule $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$,
    - qui devient $2\sqrt{5}$ grâce à la formule $\sqrt{a^2} = a$.

- **Réduire une somme de racines carrées**

  - Vous savez réduire la somme $2x + 10x$ en $12x$.
    Vous réduirez la somme $2\sqrt{5} + 10\sqrt{5}$ en $12\sqrt{5}$. Au lieu d'ajouter des x, on ajoute des $\sqrt{5}$.

    Remarque : Rappelons que $2\sqrt{5} + 10\sqrt{5}$ devient $12\sqrt{5}$ grâce à la factorisation $(2 + 10)\sqrt{5}$.

  - Mais pour réduire $\sqrt{20} + \sqrt{500}$, il faut d'abord simplifier les deux racines pour obtenir $2\sqrt{5} + 10\sqrt{5}$.

  ⚠ Ne vous laissez pas aller à écrire n'importe quoi... $\sqrt{20} + \sqrt{5}$ ne fait pas $\sqrt{25}$ ...

- **Réduire un produit de racines carrées**
  - Plusieurs manières de faire en général, mais qui utilisent toutes les décompositions pour faire apparaître les carrés qui élimineront des racines carrées.

- **Développer avec des racines carrées**
  - Comme avec les développements littéraux, j'ai deux situations :
    - les distributions (distribuez séparément les **S**ignes, les **N**ombres puis les **R**acines),
    - les trois identités remarquables.

- **Rendre entier un dénominateur en éliminant une racine carrée**
  - Par convention, il est demandé de ne pas donner un résultat avec des racines au dénominateur.
  - Pour une fraction du type $\dfrac{\dots}{\sqrt{b}}$ ou du type $\dfrac{\dots}{a\sqrt{b}}$, on multiplie numérateur et dénominateur par $\sqrt{b}$.
  - Pour une fraction du type $\dfrac{\dots}{a+\sqrt{b}}$, on multiplie numérateur et dénominateur par $a-\sqrt{b}$.

    On dit que $a-\sqrt{b}$ est l'expression conjuguée de $a-\sqrt{b}$.
    Grâce à une identité remarquable bien connue, le produit $(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})$ devient $a^2-(\sqrt{b})^2$ et il n'y a plus de racine carrée...

  Remarque : Dans tous les cas, prenez garde à ne pas oublier de parenthèses si besoin pour multiplier tout le numérateur.

Remarques sur les exercices :

- L'exercice ① utilise essentiellement les deux formules $\sqrt{a^2}=a$ et $(\sqrt{a})^2=a$ (et certainement des formules sur les puissances...).
- L'exercice ② travaille les simplifications de racines carrées, numériques et littérales.
- L'exercice ③ est consacré uniquement aux "équations carrés".
- Les exercices ④ et ⑤ sont des réductions de sommes et de produits, numériques et littéraux.
- L'exercice ⑥ propose des développements.
- L'exercice ⑦ demande de rendre entiers des dénominateurs.
- L'exercice ⑧ est très simple mais à condition de comprendre la question...
- Les exercices ⑨ à ⑫ sont des situations géométriques où interviennent les racines carrées.

Dans les exercices ②, ④, ⑤ et ⑥, n et m désignent des entiers positifs.

---

① Sans utiliser la calculatrice (sauf pour vérifier), écrire sous la forme d'un entier :

$A=\sqrt{49^2}$; $B=\sqrt{\dfrac{450}{2}}$; $C=(\sqrt{10})^2$; $D=\sqrt{3\times3\times3\times3\times3\times3}$; $E=\sqrt{\sqrt{81}}$; $F=\sqrt{(-14)^2}$; $G=\sqrt{6^2\times11^2}$

$H=\sqrt{5}\times\sqrt{3}\times\sqrt{5}\times\sqrt{3}$; $I=\sqrt{16+9}$; $J=\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}$; $K=\sqrt{900}$; $L=\sqrt{2^{10}}$

$M=(\sqrt{10})^4$; $N=\sqrt{810\,000}$; $O=\sqrt{16}+\sqrt{9}$; $P=((\sqrt{5})^3)^2$; $Q=2\sqrt{3}\times3\sqrt{3}$; $R=(\sqrt{10})^6$; $S=(-\sqrt{5})^2$

---

② Simplifier en détaillant les calculs pour les **2.**, **3.** et **4.** :

1. Calcul mental : $A=\sqrt{50}$; $B=\sqrt{8}$; $C=\sqrt{27}$; $D=\sqrt{28}$; $E=\sqrt{18}$; $F=\sqrt{125}$; $G=\sqrt{98}$; $H=\sqrt{500}$

2. $I=\sqrt{99}$; $J=\sqrt{180}$; $K=\sqrt{48}$; $L=\sqrt{120}$; $M=\sqrt{72}$; $N=\sqrt{162}$; $O=\sqrt{800}$

3. $P=\sqrt{588}$; $Q=\sqrt{242}$; $R=\sqrt{3\,150}$

4. $S=\sqrt{25n}$; $T=\sqrt{6n^2}$; $U=\sqrt{12m}$; $V=\sqrt{9mn^2}$; $W=\sqrt{50n^3}$; $X=\sqrt{27m^2n^5}$

---

③ **1.** Résoudre :

a. $x^2=50$ **c.** $x^2-3=0$ **e.** $1-x^2=-7$

b. $x^2+9=0$ **d.** $9x^2=25$ **f.** $(x-2)^2=81$

2. En électricité, la puissance P, en watts, dissipée par un appareil de résistance R, en ohms, traversé par un courant d'intensité I, en ampères, est calculée par $P = RI^2$.

a. Calculer la résistance d'un appareil dissipant 50 W sous un courant de 2 A.

b. Calculer l'intensité du courant si un appareil de résistance 400 Ω dissipe 44 100 W.

c. Exprimer I en fonction de P et R.

3. **a.** Un disque a une aire A = 300 cm^2.
Calculer son rayon R, arrondi à 0,1 cm.

b. Exprimer R en fonction de A.

---

④ Réduire les sommes en détaillant les calculs pour les **2.**, **3.** et **4.** :

1. Calcul mental : $A = \sqrt{20} + \sqrt{5}$; $B = \sqrt{2} + \sqrt{8}$; $C = \sqrt{300} - \sqrt{3}$

2. $D = \sqrt{12} + \sqrt{75}$; $E = \sqrt{50} - \sqrt{18}$; $F = \sqrt{45} - \sqrt{500} + \sqrt{125}$; $G = \sqrt{8} + \sqrt{12} + \sqrt{18}$; $H = \sqrt{54} - \sqrt{150}$

3. $I = 3\sqrt{28} + 2\sqrt{700}$; $J = 5\sqrt{27} - 2\sqrt{75} + 12\sqrt{12}$; $K = 3\sqrt{80} + 2\sqrt{275} - 5\sqrt{125}$

4. $L = \sqrt{9n} + \sqrt{n}$; $M = \sqrt{50n} - \sqrt{32n}$; $N = \sqrt{n^3} + \sqrt{n}$; $O = \sqrt{28n} + \sqrt{175n^3}$; $P = \sqrt{4m^2n} - \sqrt{m^4n^3}$

---

⑤ Réduire les produits en détaillant les calculs :

$A = \sqrt{6} \times \sqrt{15}$; $B = \sqrt{14} \times \sqrt{35} \times \sqrt{10}$; $C = 3\sqrt{20} \times 5\sqrt{8}$; $D = 3\sqrt{150} \times \sqrt{192}$; $E = 5\sqrt{n} \times 3\sqrt{3n} \times \sqrt{5n}$

---

⑥ Développer et réduire les expressions suivantes :

$A = (4\sqrt{3} - 5)(2\sqrt{2} - \sqrt{3})$; $B = (7 + 3\sqrt{5})^2$; $C = (6\sqrt{5} - 5\sqrt{7})^2$; $D = (\sqrt{5} - 3\sqrt{2})(\sqrt{5} + 3\sqrt{2})$

$E = (\sqrt{n} - \sqrt{2})(\sqrt{n} + 2\sqrt{2})$; $F = (2\sqrt{m} + 3\sqrt{n})^2$

---

⑦ Écrire les fractions suivantes avec un dénominateur entier :

1. $A = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$; $B = \dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$; $C = \dfrac{7}{2\sqrt{3}}$; $D = \dfrac{2-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$; $E = \dfrac{3\sqrt{10}}{\sqrt{6}}$; $F = \dfrac{4\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$; $G = \dfrac{1-2\sqrt{7}}{7\sqrt{7}}$

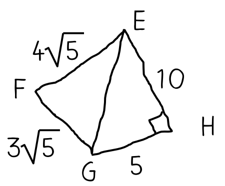
2. $H = \dfrac{5}{1+\sqrt{2}}$; $I = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2}$; $J = \dfrac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$; $K = \dfrac{\sqrt{5}+2\sqrt{3}}{5\sqrt{3}-\sqrt{5}}$; $L = \dfrac{\sqrt{5}+2\sqrt{3}}{5\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

---

⑧ Démontrer que la racine carrée de $14 + 6\sqrt{5}$ est $3 + \sqrt{5}$.

---

⑨ Démontrer que EFG est un triangle rectangle.



---

⑩ Dans cet exercice, a désigne un réel strictement positif.
On choisira des noms de sommets pour les carrés et cube.

1. Calculer la longueur des diagonales d'un carré de côté a.

2. Calculer la longueur des côtés d'un carré de diagonale a.

Dans les deux questions suivantes, on considère des solides posés sur un plan horizontal.
On admet qu'une arête "verticale" est perpendiculaire à toute droite sécante "horizontale".

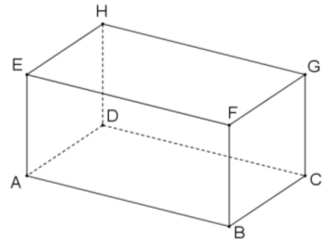
3. Calculer la longueur des diagonales d'un cube d'arête a .

4. Soit un pavé droit $ABCDEFGH$ tel que $AE = AD = a$ et $AB = 2a$.

a. Calculer la longueur EG de la diagonale de la face $EFGH$.

b. Calculer la longueur AG de la diagonale du pavé.

c. Démontrer que ABG est rectangle en B .



⑪ On rappelle que, pour tout angle aigu α , on a : $(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$.

1. Sachant que $\cos 60° = \frac{1}{2}$, calculer la valeur exacte de $\sin 60°$.

2. Sachant que $\cos 45° = \sin 45°$, calculer la valeur exacte de $\cos 45°$.

⑫ Voici un morceau de spirale de Pythagore.

Déterminer la valeur exacte de la longueur demandée.

Puis déterminer l'arrondi à 0,1° de l'angle demandé.