Correction de 2^{de} - CALCUL ALGÉBRIQUE - Fiche 4

①
- Supposons que $\frac{1}{3}$ est décimal. → Je suppose le contraire de ce que je dois démontrer.
- Alors il peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ avec a entier relatif et n entier naturel. → J'en déduis une 1ère conséquence.

  C'est-à-dire : $\frac{1}{3}=\frac{a}{10^n}$

  et donc $3\times a = 1\times 10^n$ avec a entier → J'en déduis une 2ème conséquence avec le produit en croix.

  et donc 10^n est un multiple de 3 : c'est impossible → Puis une 3ème conséquence qui est impossible !

  Choisissez l'une des deux :
  car la décomposition de 10^n ne contient que des 2 et des 5 et donc pas de 3. → Justification par la décomposition en facteurs premiers...
  ou car la somme des chiffres de 10^n vaut 1. → ... ou justification par le critère de divisibilité par 3.
- On en déduit que la supposition de départ est absurde.

  Donc $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal. CQFD.

---

②
- Supposons que $\frac{7}{3}$ est décimal.
- Alors il peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ avec a entier relatif et n entier naturel.

  C'est-à-dire : $\frac{7}{3}=\frac{a}{10^n}$

  et donc $3\times a = 7\times 10^n$ avec a entier

  et donc 7×10^n est un multiple de 3 : c'est impossible

  Choisissez l'une des deux :
  car la décomposition de 7×10^n ne contient que des 2, des 5 et un 7 et donc pas de 3.
  ou car la somme des chiffres de 7×10^n vaut 8.
- On en déduit que la supposition de départ est absurde.

  Donc $\frac{7}{3}$ n'est pas décimal. CQFD.

---

③
- Supposons que $\frac{1}{7}$ est décimal.
- Alors il peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ avec a entier relatif et n entier naturel.

  C'est-à-dire : $\frac{1}{7}=\frac{a}{10^n}$

  et donc $7\times a = 10^n$ avec a entier

  et donc 10^n est un multiple de 7 : c'est impossible

  car la décomposition de 10^n ne contient que des 2 et des 5 et donc pas de 7. → Pas de critère de divisibilité par 7 pour justifier.
- On en déduit que la supposition de départ est absurde.

  Donc $\frac{1}{7}$ n'est pas décimal. CQFD.

---

④
- Supposons que $1+\sqrt{5}$ est rationnel.
- Alors il peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ avec a et b entiers.

  C'est-à-dire : $1+\sqrt{5}=\frac{a}{b}$

  donc $\sqrt{5}=\frac{a}{b}-1$

  donc $\sqrt{5}=\frac{a}{b}-\frac{b}{b}$ → Je réduis au même dénominateur pour écrire la soustraction en une seule fraction.

  donc $\sqrt{5}=\frac{a-b}{a}$ avec $a-b$ et b entiers car a et b entiers

  et donc $\sqrt{5}$ s'écrit sous la forme d'une fraction d'entiers : c'est impossible car il est irrationnel.
- On en déduit que la supposition de départ est absurde.

  Donc $1+\sqrt{5}$ n'est pas rationnel. CQFD.

⑤

- Supposons que $2 + 5\sqrt{3}$ est rationnel.
- Alors il peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ avec a et b entiers.

  C'est-à-dire : $2 + 5\sqrt{3} = \frac{a}{b}$

  donc $5\sqrt{3} = \frac{a}{b} - 2$

  donc $5\sqrt{3} = \frac{a - 2b}{b}$

  donc $\sqrt{3} = \frac{a - 2b}{b} \times \frac{1}{5}$ → *Il est plus rapide de multiplier la fraction par $\frac{1}{5}$ que de la diviser par 5.*

  donc $\sqrt{3} = \frac{a - 2b}{5b}$ avec $a - 2b$ et $5b$ entiers car a et b entiers

  et donc $\sqrt{3}$ s'écrit sous la forme d'une fraction d'entiers : c'est impossible car il est irrationnel.
- On en déduit que la supposition de départ est absurde.
  Donc $2 + 5\sqrt{3}$ n'est pas rationnel. CQFD.

---

⑥

- Supposons que $1 - \pi$ n'est pas irrationnel.
- Alors, il est alors rationnel et peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ avec a et b entiers.

  C'est-à-dire : $1 - \pi = \frac{a}{b}$

  donc $-\pi = \frac{a}{b} + 1$

  donc $-\pi = \frac{a}{b} + \frac{b}{b}$

  donc $-\pi = \frac{a + b}{b}$

  donc $\pi = \frac{-a - b}{b}$ avec $-a - b$ et b entiers car a et b entiers

  et donc π s'écrit sous la forme d'une fraction d'entiers : c'est impossible car il est irrationnel.
- On en déduit que la supposition de départ est absurde.
  Donc $1 - \pi$ est irrationnel. CQFD.

---

⑦

- Supposons que $\sqrt{\pi}$ n'est pas irrationnel.
- Alors, il est alors rationnel et peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ avec a et b entiers.

  C'est-à-dire : $\sqrt{\pi} = \frac{a}{b}$

  donc $(\sqrt{\pi})^2 = (\frac{a}{b})^2$ → *Si deux nombres sont égaux, alors leurs carrés sont égaux (attention, la réciproque est fausse).*

  donc $\pi = \frac{a^2}{b^2}$ avec a^2 et b^2 sont entiers car a et b entiers

  et donc π s'écrit sous la forme d'une fraction d'entiers : c'est impossible car il est irrationnel.
- On en déduit que la supposition de départ est absurde.
  Donc $\sqrt{\pi}$ est irrationnel. *Quod erat demonstrandum*.