Savoir RÉSOUDRE ALGÉBRIQUEMENT UNE ÉQUATION

Ce qu'il faut savoir faire depuis la 3ème

- **Savoir résoudre les** $\boxed{\text{équations du 1er degré}}$ (pas d'autres puissances que les x^1)

Méthode :
1) Se ramener à $ax + b = cx + d$ en développant, réduisant, réduisant au même dénominateur, appliquant le produit en croix, ...
2) Supprimer les opérations nécessaires pour se ramener à $x = \ldots$.
3) Ne pas oublier de conclure.

- **Savoir résoudre une** $\boxed{\text{équation-produit-nul}}$

Méthode : Appliquer le théorème du produit-nul :
$\ldots \times \ldots = 0$
$\Leftrightarrow \ \ldots = 0$ ou $\ldots = 0$

- **Savoir résoudre une** $\boxed{\text{équation " carré " du type } x^2 = a}$

Méthode si a est positif : Transformer directement sans passer par une identité remarquable :
$x^2 = \ldots$
$\Leftrightarrow \ x = \sqrt{\ldots}$ ou $x = -\sqrt{\ldots}$ puis calculer ou simplifier les racines carrées

Méthode si a est négatif : Conclure directement à une impossibilité :
$x^2 = \ldots$: impossible car un carré ne peut être négatif
Donc, il n'y a pas de solution

- **Savoir ramener une** $\boxed{\text{équation du 2ème degré}}$ (avec des x^2 apparents ou qui apparaîtraient si on développait) **à une équation-produit-nul**

Méthode :
1) Si besoin, annuler le membre de droite.
2) Factoriser [avec un facteur commun
   ou avec l'identité remarquable qui transforme $A^2 - B^2$ en $(A - B)(A + B)$.

   Remarque : Le facteur commun peut être simple (x , ou $2x$, ...) ou une somme $(\ldots + \ldots)$.

   Remarque : Dans l'identité remarquable, les carrés peuvent être :
   - évidents ($(3x + 2)^2$ est clairement le carré de l'expression $3x + 2$),
   - des carrés "parfaits" d'entiers (25 est 5^2),
   - des carrés pas "parfaits" (3 est $(\sqrt{3})^2$).
3) Appliquer le théorème du produit-nul.

Ce qu'il faut savoir faire de nouveau

- **Savoir ramener une** $\boxed{\text{équation du 2ème degré}}$ **à une** $\boxed{\text{équation-carré-nul}}$ **:**

Méthode :
1) Si besoin, annuler le membre de droite.
2) Factoriser [avec l'identité remarquable qui transforme $A^2 + 2AB + B^2$ en $(A + B)^2$
   ou avec l'identité remarquable qui transforme $A^2 - 2AB + B^2$ en $(A - B)^2$.
3) Appliquer le théorème du carré-nul :
   $(\ldots)^2 = 0$
   $\Leftrightarrow \ \ldots = 0$

- **Savoir résoudre une** $\boxed{\text{équation-quotient-nul}}$ **:**

Méthode :
1) Déterminer l'ensemble (ou domaine) de résolubilité (c'est-à-dire l'ensemble des réels pour lesquels le ou les dénominateurs ne sont pas nuls).
2) Appliquer le théorème du quotient-nul :

   Dans l'ensemble de résolubilité : $\dfrac{A}{B} = 0 \Leftrightarrow A = 0$.

Attention : Toute consigne « Résoudre ... » doit être conclue par « *Les solutions sont* ... » ou par « $\mathscr{S} = \{ \ldots \}$ » .

Remarques sur les exercices

- Les exercices ① et ② permettent de réviser toutes les techniques de collège.
- Les exercices ③ et ④ traitent des nouvelles équations.
- L'exercice ⑤ est pimenté…

① Résoudre dans ℝ les équations de base suivantes :

Niveau 1 :

a) $12x - 5 = 7x + 1$

b) $(14x - 21)(15 - 10x) = 0$

c) $x^2 = 121$

d) $(x + 1)^2 - 25 = 0$

e) $x^2 + 400 = 0$

f) $13x^2 - x = 0$

g) $4x^2 - 121 = 0$

Niveau 2 :

h) $5(x + 3) - (7 - 2x) = -2(3x + 5) - 3(3 - 6x)$

i) $(3x - 2)(5 - 2x)(x - 3) = 0$

j) $x^2 = 3$

k) $(x + 1)^2 - (5 - 4x)^2 = 0$

l) $(x + 1)^2 + 1 = 0$

m) $(5x - 1)(6x + 3) + (-4 - 8x)(5x - 1) = 0$

n) $(x + 1)^2 - (5 - 4x)^2 = 0$

② Résoudre dans ℝ les équations suivantes :

a) $(1 - 5x)(5 + x) = (x + 5)^2$

b) $(x - 7)^2 - (1 + 2x)^2 = 0$

c) $(3x + 2)(3 - 2x)(2 - 3x)(2x + 3) = 0$

d) $101 + x^2 = 1$

e) $1 - (x + 2)^2 = 0$

f) $(x - 1)(2x + 1)^2 = 0$

g) $x^2 = 35$

h) $\dfrac{4 - 7x}{2} + \dfrac{5 + 4x}{5} = 0$

i) $81x^2 - 64 = 0$

j) $(4x - 5)(5x + 4) = (4 + 5x)(5 + 4x)$

k) $(2x - 3)^2 = 16$

l) $10(11x + 15) = -7(8 - 9x)$

m) $x^2 = 45$

n) $(1{,}2x + 5{,}7)(0{,}15 + 0{,}4x) = 0$

o) $25x^2 - x = 0$

p) $-2(8x + 3) = 14 - 12x - 4(5 + x)$

q) $\dfrac{x + 1}{2} + \dfrac{x + 1}{3} = \dfrac{x + 1}{5}$

r) $2(6x + 7) = (-7 + 4x)(6x + 7)$

③ Résoudre dans ℝ les équations suivantes :

a) $x^2 + 6x + 9 = 0$

b) $x^2 - 16x + 64 = 0$

c) $9x^2 + 12x + 4 = 0$

d) $100x^2 - 140x + 49 = 0$

e) $4 - 28x + 49x^2 = 0$

f) $25x^2 = 10x - 1$

g) $2x + 1 + x^2 = 0$

h) $x + 0{,}25x^2 = 1$

④ Pour chacune des équations suivantes, déterminer le domaine de résolubilité et résoudre :

a) $\dfrac{3x - 6}{5 - x} = 0$

b) $\dfrac{(2x + 1)(5 - x)}{3x - 1} = 0$

c) $\dfrac{x^2 - 25}{x + 2} = 0$

d) $\dfrac{7x + 10}{(4 - x)(6x + 3)} = 0$

e) $\dfrac{(3 + x)(2x - 8)}{4 - x} = 0$

f) $\dfrac{2 - x}{x^2 - 4} = 0$

g) $\dfrac{1}{x - 3} + \dfrac{1}{2x + 1} = 0$

⑤ Résoudre dans ℝ les équations suivantes :

a) $(2x + 1)(5 + x) = 5 + x$

b) $(x - 3)^2 = 3 - x$

c) $3x - 6 - (2 - x)(5 + x) = 0$

d) $x^2 - 9 = (3 + x)(10 - 7x)$

e) $(10 - 2x)(10 + x) = 25 - x^2$

a) $x + (3 - 3x)(x + 1) - 1 = 0$