Savoir RÉSOUDRE ALGÉBRIQUEMENT UNE INÉQUATION " SIGNE D'UN PRODUIT "

Ce qu'il faut avoir compris

- **Qu'une comparaison à 0 signifie un signe**

« $A > 0$ » signifie que A est strictement positif.
« $A \geqslant 0$ » signifie que A est positif ou nul.
« $A < 0$ » signifie que A est strictement négatif.
« $A \leqslant 0$ » signifie que A est négatif ou nul.

- **Les tableaux de signes des fonctions affines**

L'ordre des signes d'une fonction affine $x \mapsto ax + b$ ne dépend que du coefficient directeur a .

- Si $a > 0$, alors on a :

x		$-b/a$	
signes de $ax + b$	$-$	0	$+$

car la fonction est croissante et passe donc des négatifs aux positifs.

- Si $a < 0$, alors on a :

x		$-b/a$	
signes de $ax + b$	$+$	0	$-$

car la fonction est décroissante et passe donc des positifs aux négatifs.

Dans les deux cas, l'annulation et le changement de signe se font à l'abscisse $-\dfrac{b}{a}$, solution de l'équation $ax + b = 0$.

Ce qu'il faut savoir faire

- **Résoudre une inéquation de la forme « *signe d'un produit* »**

- Il s'agit de la forme $\boxed{(\,expression\ 1\,)\,(\,expression\ 2\,) > 0}$ où :
  - les deux expressions sont des fonctions affines de l'inconnue x ;
  - on peut avoir un produit avec plus de deux expressions en facteurs ;
  - « > 0 » traduit que le quotient doit être du signe strictement positif,
    mais on peut avoir les autres signes « $\geqslant 0$ » ou « < 0 » ou « $\leqslant 0$ » .

Remarque : Le produit peut être avoir plus de deux facteurs, mais la méthode restera la même.

- **Méthode**

1) On fait un tableau de signes avec :
   - une **ligne des** $\boxed{\text{signes de } expression\ 1}$, en trouvant l'abscisse d'annulation et l'ordre des signes,
   - une **ligne des** $\boxed{\text{signes de } expression\ 2}$, de la même manière.
2) On en déduit une **ligne des** $\boxed{\text{signes du produit}}$:
   - en reportant les zéros,
   - en appliquant dans chaque colonne la règle des signes : $\begin{cases} + \text{ par } + \text{ fait } + \\ + \text{ par } - \text{ fait } - \\ - \text{ par } + \text{ fait } - \\ - \text{ par } - \text{ fait } + . \end{cases}$
3) On regarde le signe demandé par l'inéquation.
   On cherche dans la **ligne des** $\boxed{\text{signes du produit}}$ les cases qui contiennent ce signe.
4) Dans la **ligne de** $\boxed{x}$, on trouve tous les intervalles correspondants.
   C'est la réunion de tous ces intervalles qui forme l'**ensemble des solutions** $\mathscr{S}$ de la conclusion.

   Remarque : Il peut n'y avoir qu'un seul intervalle...

   ⚠ Attention aux crochets autour des abscisses !

   Il faut $\begin{cases} \text{les ouvrir si vous avez « } > 0 \text{ » ou « } < 0 \text{ »} \\ \text{les fermer si vous avez « } \geqslant 0 \text{ » ou « } \leqslant 0 \text{ » .} \end{cases}$

- **Se ramener à une inéquation de la forme « signe d'un produit »**

1) Si besoin, annuler le membre de droite pour avoir 0 et se ramener à une étude de signe.
2) Factoriser pour se ramener à un produit d'expressions affines du type $ax + b$.
   N'hésitez pas à revoir la fiche ***ALG 06 - Savoir factoriser***.

Remarque sur les exercices

- Il y a beaucoup d'inéquations qui se ressemblent dans cette fiche. Cela permet de s'entraîner. Pour voir uniquement celles qui sont particulières, suivez les ♣.
- L'exercice ① propose des inéquations de base, déjà sous la forme « *signe d'un produit* ».
- Les exercices ② et ③ demandent de se ramener à la forme « *signe d'un produit* ».
- Attention, dans l'exercice ③, on a glissé un facteur non affine qu'il est impossible de factoriser. Laissez-le comme il est et étudiez son signe sans crainte.

① Résoudre les inéquations suivantes :

a. $(2x+7)(5-3x) < 0$ ♣

b. $(-7+x)(1+4x) \geqslant 0$

c. $-2x(1-2x) \leqslant 0$ ♣

d. $(2-x)(10x+1) > 0$

e. $(6x-7)^2 > 0$ ♣

f. $(-2x-5)(5+x)(2-5x) \geqslant 0$ ♣

g. $x(8-x)(4x-11) < 0$

h. $(6+x)(12-4x)^2 \geqslant 0$ ♣

② Résoudre les inéquations suivantes :

a. $49x^2-100 \leqslant 0$ ♣

b. $16x^2 > 25$

c. $(x+3)^2-4 \geqslant 0$

d. $(2-5x)^2 < 1$

e. $(1-3x)(7+x) \leqslant (x+7)(5x-4)$

f. $(7x-2)^2 \leqslant (4+x)^2$

g. $4x^2 < 3$

h. $x^3-9x \geqslant 0$ ♣

i. $(2+x)^2 < x^2-4$ ♣

③ Résoudre les inéquations suivantes :

a. $25x^2+10x+1 > 0$ ♣

b. $25x^2+10x+1 \geqslant 0$ ♣

c. $25x^2+10x+1 \leqslant 0$ ♣

d. $25x^2+10x+1 < 0$ ♣

e. $36x^2+49 > 84x$

f. $12x-9x^2 \geqslant 4$

g. $(x^2+9)(x-1) \leqslant 6x(x-1)$ ♣

h. $x^2+3+2\sqrt{2}\,x \geqslant 1$