Savoir UTILISER UNE ÉQUATION CARTÉSIENNE DE DROITES

Toute la fiche se passe dans un plan muni d'un repère (O, I, J) orthogonal.

Ce qu'il faut avoir compris

- **Quand ai-je le droit d'écrire le = de l'équation cartésienne ?**
  - Si l'énoncé assure qu'un point $A(a\,;b)$ **est sur** (d), alors je peux écrire l'**égalité** avec a et b.
  - Si l'énoncé demande si un point $A(a\,;b)$ est sur (d), on ne le sait donc pas au départ.
    Alors je ne peux pas écrire l'égalité, je dois la tester.

Ce qu'il faut savoir faire :

- **Calculer la coordonnée manquante d'un point qui appartient à une droite (d)**

  On me donne trois informations : $\begin{cases}\text{une équation cartésienne de la droite,}\\ \text{l'appartenance du point à la droite,}\\ \text{une des deux coordonnées du point (soit l'abscisse, soit l'ordonnée).}\end{cases}$

  Méthode : 1) Je précise que le point appartient à la droite (pour avoir le droit d'écrire le = de l'équation).
  2) J'écris l'égalité de l'équation cartésienne en remplaçant x ou y par la coordonnée connue.
  J'obtiens une équation à résoudre d'inconnue la coordonnée manquante.
  3) Je résous l'équation et je trouve la coordonnée manquante.

- **Déterminer si un point $A(x_A\,;y_A)$ appartient ou non à une droite (d)**

  On me donne trois informations : $\begin{cases}\text{une équation cartésienne de la droite,}\\ \text{l'abscisse du point,}\\ \text{l'ordonnée du point.}\end{cases}$

  Méthode : 1) Je remplace x et y par x_A et y_A $\begin{cases}\text{dans le membre de droite de l'équation cartésienne et je calcule}\\ \text{dans le membre de gauche de l'équation cartésienne et je calcule.}\end{cases}$

  N'écrivez jamais l'égalité avant d'avoir fait vos deux calculs séparément.

  2) Je constate que les deux résultats sont $\left[\begin{array}{l}\text{égaux}\\ \text{ou différents.}\end{array}\right.$

  3) Je conclus que $\left[\begin{array}{l}A \in (d)\\ \text{ou } A \notin (d)\end{array}\right.$

  Remarque : Il arrive souvent qu'un des deux membres de l'équation ne soit pas à calculer.

  - Pour les équations de la forme $y = ax + b$: on ne calcule que $ax_A + b$ et $\left[\begin{array}{l}\text{on trouve } y_A\\ \text{ou on ne trouve pas } y_A.\end{array}\right.$

  - Pour les équations de la forme $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$: on ne calcule que $\alpha x_A + \beta y_A + \gamma$ et $\left[\begin{array}{l}\text{on trouve } 0\\ \text{ou on ne trouve pas } 0.\end{array}\right.$

  - Et pour les équations de la forme $x = c$, il n'y a rien à calculer... Soit x_A est égal à c soit il ne l'est pas.

  Remarque : Cette méthode peut être utilisée pour déterminer si trois points A, B et C sont alignés ou non.
  On détermine une équation cartésienne de (AB) et on teste si C appartient ou non à (AB).
  Mais ça sera plus long que d'utiliser les **vecteurs colinéaires** (voir fiche **VEC 02**).

  On peut également l'utiliser pour démontrer qu'un point est l'intersection de deux droites.
  Il suffit de tester si le point appartient ou non aux deux droites.

- **Tracer une droite (d)**
  - **Méthode 1 avec une équation réduite** : Méthode purement graphique, si on ne demande pas de justification.
    - *1er cas avec $x = c$* : Je trace la droite "verticale" passant par l'abscisse c.
    - *2ème cas avec $y = b$* : Je trace la droite "horizontale" passant par l'ordonnée b.
    - *3ème cas avec $y = ax + b$* :
      1) Je trouve un 1er point en plaçant l'ordonnée à l'origine b sur l'axe des ordonnées.
      2) Je trouve un 2ème point avec le coefficient directeur a et la méthode de l'escalier.
  - **Méthode 2** : Méthode générale permettant de justifier le tracé en "calculant" deux points.
    1) Je choisis une valeur de x, je la remplace dans l'équation cartésienne et je calcule celle de y par équation.
    2) Les valeurs de x et de y trouvées sont les coordonnées d'un 1er point de la droite.
    3) Je recommence avec une autre valeur choisie de x pour trouver un 2ème point.
    4) Je trace en reliant les deux points (s'ils sont trop rapprochés, je peux calculer un 3ème point).

Remarque : Choisir la valeur 0 est souvent pratique, mais pas toujours.
Il vaut mieux choisir une valeur qui permet d'éviter les fractions... Et ce n'est pas toujours facile...

Remarque : On peut très bien choisir une valeur de y et calculer celle de x par équation.

Remarque : C'est la méthode qui fonctionne toujours, notamment quand a et b ne sont pas utilisables.

- **Déterminer si deux droites (d_1) et (d_2) sont parallèles ou sécantes**

  On vous laisse traiter tous seuls le cas trivial où l'une des deux droites est verticale ou horizontale.

  - Si on me donne les deux équations cartésiennes :

    Méthode : 1) Je trouve les deux coefficients directeurs avec les équations réduites.

    2) Je constate que les deux coefficients sont $\left[\begin{array}{l}\text{égaux}\\ \text{ou différents.}\end{array}\right.$

    3) Je conclus que $\left[\begin{array}{l}(d_1) \,//\, (d_2)\\ \text{ou } (d_1) \text{ et } (d_2) \text{ ne sont pas parallèles.}\end{array}\right.$

  - Si on me donne quatre points :

    Méthode : Même méthode en trouvant les deux coefficients directeurs avec les taux de variations.

    Remarque : La méthode est plus rapide qu'avec les **vecteurs colinéaires**.

- **Déterminer les coordonnées du point d'intersection K de deux droites (d_1) et (d_2) sécantes**

  Cette grosse compétence sera traitée séparément dans la fiche **DTE 03**.

Remarques sur les exercices

- L'exercice ① travaille sur les deux premières compétences à ne pas confondre :
  - calculer la coordonnée manquante d'un point qui appartient à une droite,
  - déterminer si un point appartient ou non à une droite.
- Les exercices ② et ③ sont des tracés de droites.
- Les exercices ④ et ⑤ demandent d'étudier des parallélismes de droites.
- Les exercices ⑥ et ⑦ traitent de points d'intersection de droites mais sans utiliser les techniques vues à la fiche **DTE 03**.
- L'exercice ⑧ est un gros problème de géométrie qui fait le bilan de nombreux outils vus cette année.

---

① Les exercices **1.** à **3.** sont indépendants.

1. On donne la droite $(d) : 3x - 2y + 1 = 0$.

a. Déterminer l'abscisse du point R de (d) dont l'ordonnée vaut 8 .

b. Le point $M\,(\,20\,;\,31\,)$ est-il sur (d) ?

c. Déterminer l'ordonnée du point A de (d) dont l'abscisse vaut -5 .

d. Le point $E\,(\,-7\,;\,-10\,)$ est-il sur (d) ?

2. On donne la droite $(\Delta) : y = -5x + 11{,}5$.

a. Le point $B\,(\,3{,}5\,;\,-6\,)$ est-il sur (Δ) ?

b. Le point S est sur (Δ) et a pour abscisse $-0{,}5$.
Calculer son ordonnée.

c. Le point C a pour ordonnée $7{,}5$.
Calculer son abscisse sachant qu'il appartient à (Δ) .

3. Soit (d) la droite d'équation cartésienne $2x - 5 = 3y + 8$.

a. Déterminer si les points $E\,(\,2\,;\,-2\,)$ et $F\,(\,233\,;\,151\,)$ appartiennent ou non à (d) .

b. On donne le point $K\,(\,a\,;\,5\,)$ et le point $L\,(\,-3\,;\,b\,)$ sur la droite (d) .
Calculer a et b .

4. On donne les droites $(\Delta_1) : y = -5x - 35$, $(\Delta_2) : -2x + 4y - 194 = 0$ et $(\Delta_3) : x = 15$.

a. Déterminer si $H\,(-15\,;\,41)$ appartient à ces trois droites.

b. La droite (Δ_3) coupe la droite (Δ_1) en un point M .
Quelle l'abscisse de M ?
Calculer son ordonnée.

5. Soit les points $A\,(36\,;\,21)$ et $B\,(40\,;\,18)$ et les droites sécantes $(d) : 3x + 4y - 192 = 0$ et $(d') : 2x = 134 - 3y$.
L'un des deux points A et B est-il le point d'intersection des deux droites ?

6. Soit la parabole $(P) : 2x^2 - 3y - 5 = 0$.

a. Déterminer l'ordonnée du point de (P) dont l'abscisse vaut 4 .

b. Le point $M\,(6{,}5\,;\,26{,}5)$ est-il sur (P) ?

c. Déterminer l'abscisse des points de (P) dont l'ordonnée vaut -1 .

d. Expliquer pourquoi aucun point de (P) n'a pour ordonnée -3 .

7. On considère le cercle $(C) : x^2 - 12x + y^2 - 6y + 20 = 0$.

a. Les points $E\,(10\,;\,6)$, $F\,(7\,;\,8)$ et $G\,(3\,;\,-1)$ sont-ils sur (C) ?

b. Déterminer l'ordonnée du point de (C) dont l'abscisse vaut 1 .

---

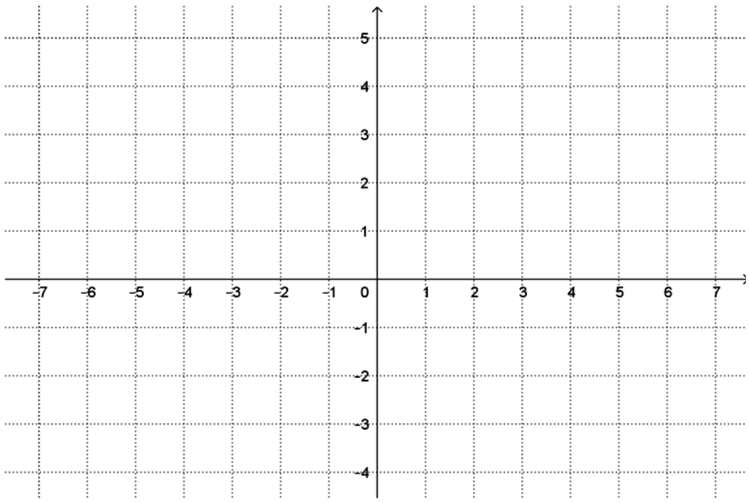
② Sur le graphique ci-contre, tracer sans justification les droites suivantes :

$(d_1) : y = \dfrac{1}{2}x + 3$; $(d_2) : x = -5$;

$(d_3) : y = 3x - 3$; $(d_4) : y = -4x$;

$(d_5) : y = -2$; $(d_6) : y = \dfrac{2}{3}x + 1$;

$(d_7) : -x + y - 4 = 0$; $(d_8) : 3y = -x - 3$.



---

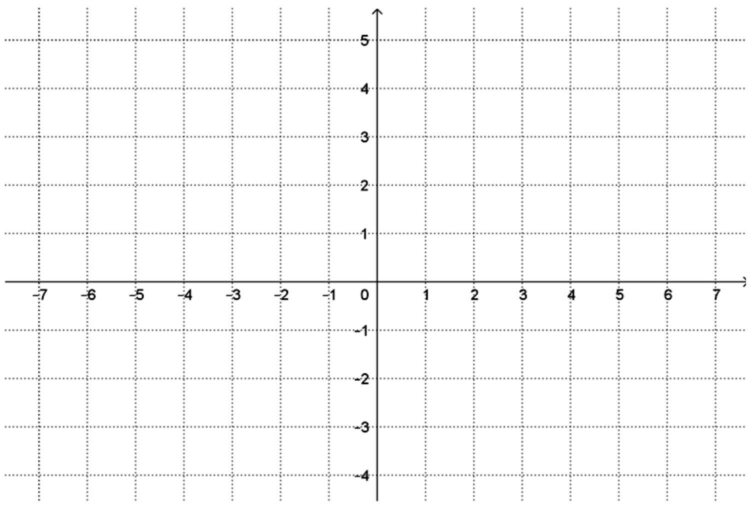
③ On donne les droites suivantes :

$(d_1) : x - 3y + 5 = 0$; $(d_2) : -3x + y + 4 = 0$;

$(d_3) : 5x + 3y - 7 = 0$; $(d_4) : x + 8y - 13 = 0$;

$(d_5) : 3x - y = -17$; $(d_6) : 5x + 2y + 24 = 0$.

Pour chacune de ces droites, déterminer deux points permettant d'effectuer son tracé sur le graphique ci-contre.



④ Soit les points :

$A(12;21)$, $B(-15;-24)$, $C(1;5)$, $D(-5;-5)$, $E(3;18)$, $F(-6;126)$, $G(-5;64)$, $H(0;-1)$, $K(-7;13)$, $L(-7;-1)$, $M(41;17)$, $N(41;-12)$ et $R(40{,}5;68{,}5)$.

a. Déterminer si les droites (AB) et (CD) sont parallèles ou non.

b. De même avec (EF) et (GH) , puis avec (KL) et (MN) .

c. Donner la décomposition en facteurs premiers des nombres entiers 475 et 285 .
En déduire le coefficient directeur de la droite (AR) .
Les points A , B et R sont-ils alignés ?

---

⑤ On donne les droites (d_1) : $2y-3x-5=0$, (d_2) : $\frac{3y}{2}=3-x$, (d_3) : $6x-4y=-1$, (d_4) : $x=-7$, (d_5) : $\frac{y}{2}+\frac{x}{3}=1$, (d_6) : $y=1{,}5x-17{,}3$, (d_7) : $5x+1=-6$.

Déterminer celles qui sont parallèles parmi ces droites.

---

⑥ Soit les droites (δ_1) : $11x-9y+55=0$ et (δ_2) : $-15x+3y+27=0$ supposée sécantes.

Démontrer que le point K de coordonnées $(4;11)$ est le point d'intersection de ces deux droites.

---

⑦ Considérons la droite (Δ) d'équation $8x-7y+42=0$.
Déterminer les coordonnées du point d'intersection de (Δ) avec l'axe des abscisses, puis les coordonnées du point d'intersection de (Δ) avec l'axe des ordonnées.

---

⑧ **Partie A : étude d'un triangle particulier**

On donne les points $A(-4;2)$, $B(7;-4)$ et $C(6;6)$.

1. **a.** Déterminer les coordonnées du milieu K de $[BC]$.

b. Montrer que les points A et K appartiennent à la droite (m_1) d'équation cartésienne $x+\frac{21}{2}y-17=0$.

c. Que peut-on dire de la droite (m_1) pour le triangle ABC .

2. On pose L le milieu de $[AC]$.
Déterminer une équation cartésienne de la droite (m_2) , médiane du triangle ABC issue de B .

3. **a.** Montrer que $G(3;\frac{4}{3})$ est le point d'intersection des médianes (m_1) et (m_2) .

b. Calculer AG et AK , puis vérifier que $AG=\frac{2}{3}AK$.

c. Montrer que $BG=\frac{2}{3}BL$.

4. On pose M le milieu de $[AB]$.

a. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{CM}$ et exprimer $\overrightarrow{CG}$ en fonction de $\overrightarrow{CM}$.

b. En déduire que G appartient à la droite (m_3) , médiane du triangle ABC issue de C .

On vient de démontrer que les trois médianes de ABC se croisent en un même point G .
On dit qu'elles sont **concourantes** en G et ce point est nommé **le centre de gravité du triangle**.
De plus, ce point se situe aux 2/3 de chaque médiane en partant du sommet.

Partie B : généralisation à un triangle quelconque

Étant donné un triangle quelconque ABC , on pose K , L et M les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

1. Utiliser la relation de Chasles et le point C pour démontrer que $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{LK}$.

On définit le point G aux $\frac{2}{3}$ de la médiane $[AK]$ en partant de A , c'est-à-dire tel que $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AK}$.

2. Déduire de l'égalité vectorielle précédente que $3\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BG}=2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BL}+2\overrightarrow{LK}$.

3. Démontrer alors que $3\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{BL}$.
En déduire que G est aussi sur la médiane $[BL]$ et préciser sa position.

Ce qu'on vient de démontrer pour la médiane $[BL]$ peut se démontrer de la même manière pour la médiane $[CM]$.
Donc, si un point est aux 2/3 d'une médiane, alors il est aux 2/3 des deux autres médianes.

4. Utiliser la relation de Chasles et le point A pour démontrer que $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{0}$.
Cette égalité vectorielle est parfois prise comme définition du centre de gravité.