Savoir VÉRIFIER OU UTILISER L'APPARTENANCE D'UN POINT À UNE COURBE

Ce qu'il faut comprendre ...

- **... que** $\left\{\begin{array}{l}\text{les antécédents sont des abscisses}\\ \text{les abscisses ne peuvent être que des antécédents}\end{array}\right.$ **et que** $\left\{\begin{array}{l}\text{les images sont des ordonnées}\\ \text{les ordonnées ne peuvent être que des images}\end{array}\right.$

- **... les trois propriétés à ne pas confondre**

  On considère un point $M\,(\,a\,;\,b\,)$ et la courbe $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f,

  - **Propriété 1** : Si M est sur $\mathscr{C}_f$ *(autrement dit : $M \in \mathscr{C}_f$),*
    alors $\left\{\begin{array}{l}\text{l'ordonnée } b \text{ est l'image de l'abscisse } a \text{ par } f\\ \text{l'abscisse } a \text{ est un antécédent de l'ordonnée } b \text{ par } f\end{array}\right.$ *(autrement dit : $f(a) = b$).*
  - **Propriété 2 (contraposée de 1)** : Si l'image par f de l'abscisse a n'est pas l'ordonnée b *(autrement dit : $f(a) \neq b$),*
    alors M n'est pas sur $\mathscr{C}_f$ *(autrement dit : $M \notin \mathscr{C}_f$).*
  - **Propriété 3 (réciproque de 1)** : Si l'image de a par f est b *(autrement dit : $f(a) = b$),*
    alors M est sur $\mathscr{C}_f$ *(autrement dit : $M \in \mathscr{C}_f$).*

Ce qu'il faut savoir faire :

- **Vérifier si un point $M\,(\,a\,;\,b\,)$ est ou n'est pas sur une courbe représentative $\mathscr{C}_f$**

  On me donne $\left\{\begin{array}{l}\text{- la fonction } f \text{ connue par l'expression de } f(x) \text{ en fonction de } x\text{ ,}\\ \text{- un point } M \text{ dont vous connaissez les deux coordonnées } (\,a\,;\,b\,)\text{ .}\end{array}\right.$

  Méthode : 1) Je calcule l'image $f(a)$ de l'abscisse a .
  2) Si je trouve l'ordonnée b , je conclus avec : $M \in \mathscr{C}_f$. (c'est la **Propriété 3**)
  Si je ne trouve pas l'ordonnée b , je conclus avec : $M \notin \mathscr{C}_f$. (c'est la **Propriété 2**)

- **Vérifier si un point $M\,(\,a\,;\,b\,)$ est ou n'est pas un point d'intersection entre deux courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$**

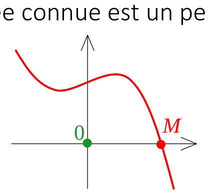
  On me donne $\left\{\begin{array}{l}\text{- la fonction } f \text{ connue par l'expression de } f(x) \text{ en fonction de } x\text{ ,}\\ \text{- la fonction } g \text{ connue par l'expression de } g(x) \text{ en fonction de } x\text{ ,}\\ \text{- un point } M \text{ dont vous connaissez les deux coordonnées } (\,a\,;\,b\,)\text{ .}\end{array}\right.$

  Mêmes deux étapes que ci-dessus à faire deux fois, pour chacune des deux fonctions.

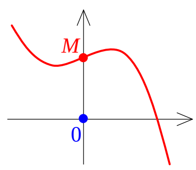
- **Calculer la coordonnée manquante d'un point sur une courbe**

  On me donne $\left\{\begin{array}{l}\text{- la fonction } f \text{ connue par l'expression de } f(x) \text{ en fonction de } x\text{ ,}\\ \text{- un point } M \text{ dont } \left\{\begin{array}{l}\text{vous savez qu'il est sur la courbe } \mathscr{C}_f\\ \text{vous connaissez une des deux coordonnées.}\end{array}\right.\end{array}\right.$

  - **1er cas** : On me donne l'abscisse a et je dois calculer l'ordonnée.
    Méthode : 1) Je calcule l'image/ordonnée $f(a) = ...$
    2) Je conclus avec : L'ordonnée de M est ... . (c'est la **Propriété 1**)
    ou : $M\,(\,a\,;\,...\,)$.
  - **2ème cas** : On me donne l'ordonnée b et je dois calculer les abscisses possibles.
    Méthode : 1) Je calcule les antécédents/abscisses en résolvant l'équation $f(x) = b$.
    2) Je conclus avec : Les abscisses possibles de M sont ... (c'est la **Propriété 1**)
  - *Remarque* : Parfois, la coordonnée connue est un peu cachée.
    Par exemples :



- si on sait que M est sur l'axe des abscisses, alors on connaît son ordonnée, c'est 0 (il n'est ni "vers le haut", ni "vers le bas").

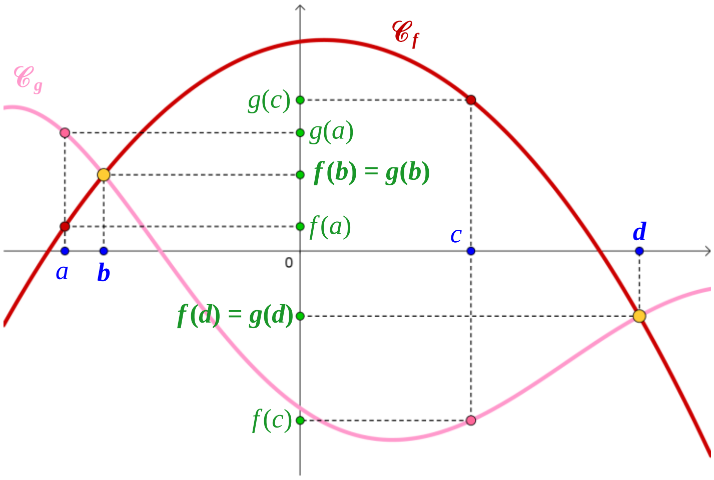


- si on sait que M est sur l'axe des ordonnées, alors on connaît son abscisse, c'est 0 (il n'est ni "vers la gauche", ni "vers la droite").

- **Calculer les deux coordonnées des points d'intersection entre deux courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$**

On me donne
- la fonction f connue par l'expression de $f(x)$ en fonction de x,
- la fonction g connue par l'expression de $g(x)$ en fonction de x,
- un point M dont
  - vous savez qu'il est sur la courbe $\mathscr{C}_f$
  - vous savez qu'il est sur la courbe $\mathscr{C}_g$
  - vous ne connaissez aucune des deux coordonnées.

- Observez et comprenez bien le schéma ci-dessous :



b et d sont les abscisses des deux points d'intersection.

Ce sont les seules abscisses qui vérifient **l'équation $f(x) = g(x)$**.

- **<u>Méthode</u>** :
  1) Je calcule les abscisses en résolvant l'équation $f(x) = g(x)$.
  2) Pour chaque abscisse/antécédent trouvée, je calcule son image/ordonnée, soit avec f, soit avec g.
  3) Je conclus avec les couples de coordonnées.

---

① **1.** Traduire les phrases suivantes sous la forme : « *... est l'image de ... par ...* ».

a. Le point de coordonnées $(84 ; -113)$ est sur la courbe représentative de g.

b. La courbe représentative de φ passe par le point de coordonnées $(0{,}75 ; 0{,}01)$.

c. La courbe représentative de f coupe l'axe des abscisses à la valeur 3.

d. La courbe représentative de h coupe l'axe des ordonnées à la valeur -2.

2. Traduire les phrases suivantes sous la forme : « *Le point de coordonnées (... ; ...) est sur la courbe de la fonction ...* ».

a. L'image de 75 par H est 2 540.

b. $F(1{,}2) = -5{,}3$

c. -2 est un antécédent de 0,5 par G.

d. Les antécédents de $\frac{2}{3}$ par f sont -7 et $\frac{1}{3}$.

---

② La fonction f est connue par le tableau de valeurs ci-dessous :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	12	6	-1	-3	1	6	12	15

a. Le point de coordonnées $(-3 ; 6)$ est-il sur la courbe représentative de f ?

b. Le point de coordonnées $(3 ; 10)$ peut-il être sur la courbe représentative de f ?

c. Le point de coordonnées $(4 ; 15)$ peut-il être sur la courbe représentative de f ?

③ Soit la fonction F définie par $F(x) = x^2 - 3$ dont la représentation graphique est notée $\mathscr{C}_F$.

a. Le point $A\,(\,0{,}12\,;\,-2{,}99\,)$ est-il sur la courbe $\mathscr{C}_F$?

b. Le point B d'abscisse 32 appartient à la courbe $\mathscr{C}_F$.
Calculer son ordonnée.

c. Calculer l'abscisse des points de la courbe $\mathscr{C}_F$ qui ont pour ordonnée 1 .

d. La courbe $\mathscr{C}_F$ passe-t-elle par le point $C\,(\,17\,;\,286\,)$?

e. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}_F$ avec l'axe des abscisses.

f. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}_F$ avec l'axe des ordonnées.

---

④ Les exercices **1.** à **4.** sont indépendants.

1. Soit les fonctions f et g définies par $f(x) = x^2 - 3$ et $g(x) = 6x - 4$.
Déterminer les coordonnées des points d'intersection des représentations graphiques de f et g .

2. **a.** Démontrer que, pour tout réel x , $-2x^2 + 5x + 3 = (\,2x + 1\,)\,(\,3 - x\,)$.

b. On définit les fonctions h_1 et h_2 par $h_1(x) = -2x^2 + 7x - 7$ et $h_2(x) = 2\,(\,x - 5\,)$.
On note respectivement $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ leurs courbes représentatives.
Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

3. On donne les fonctions F_1 et F_2 définies par $F_1(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ et $F_2(x) = 4 - 0{,}5\,x$.
Démontrer que le point $K\,(\,2\,;\,3\,)$ est un point d'intersection des courbes représentatives $\mathscr{C}_{F_1}$ et $\mathscr{C}_{F_1}$ de F_1 et F_2 .

4. Considérons la fonction du second degré $G : x \mapsto 0{,}5x^2 + 3$ et la fonction constante $H : x \mapsto 2$.
Les représentations graphiques $\mathscr{C}_G$ et $\mathscr{C}_H$ de G et H se coupent-elles ?
Si oui, donner les coordonnées des points d'intersection.

---

⑤ On a tracé ci-contre cinq représentations graphiques de fonctions et on a placé en noir quelques points à coordonnées entières.

Quelle est celle de la fonction $\varphi : x \mapsto x^2 - 3x + 1$ et quelle est celle de la fonction $\psi : x \mapsto 4 - x$.

Justifier les réponses.