Savoir DÉTERMINER DES IMAGES ET DES ANTÉCÉDENTS

Ce que je dois comprendre

- **Les quatre manières pour un énoncé de vous donner une fonction f**

  - **Manière 1** : On vous donne l'**expression** de $f(x)$ en fonction de x.
    C'est la manière la plus complète et précise : vous pouvez trouver la valeur exacte de n'importe quelle image.

    Exemples : $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$ (fonction du second degré car présence d'un x^2)

    $f(x) = -6x + \frac{1}{3}$ (fonction affine qui multiplie puis additionne)

    $f(x) = \frac{2x-5}{x+1}$ (fonction rationnelle, quotient de deux fonctions affines)

  - **Manière 2** : On vous donne un **tableau de valeurs** de quelques $f(x)$ pour quelques x.
    C'est une manière précise mais incomplète car :
    - vous n'avez pas les images de tous les nombres possibles,
    - et surtout, pour une image, vous n'êtes pas sûr d'avoir tous les antécédents.

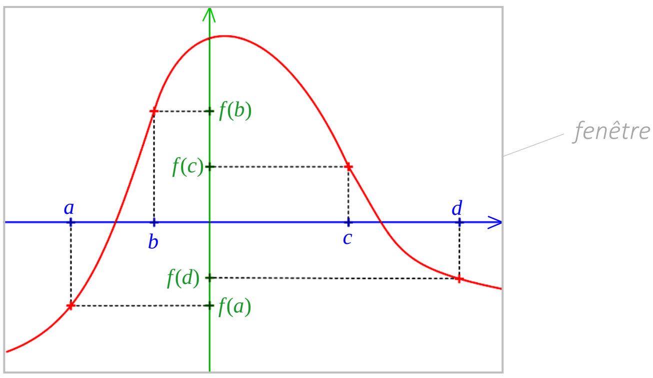
    Exemple :

x	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2
$f(x)$	1	$-0{,}5$	-1	$-0{,}5$	1	$3{,}5$	7	$11{,}5$	17

    On a ici un tableau de valeurs pour les nombres allant de -2 à 2 avec un pas de $0{,}5$.
    1 a deux antécédents, -2 et 0, mais on ne sait pas s'il n'y en a pas d'autres.

    Remarque : Il est généralement impossible de deviner l'expression de $f(x)$ en observant un tableau de valeurs.

  - **Manière 3** : On vous donne la **courbe représentative** de f.
    C'est une manière imprécise et incomplète :
    - les points ne permettent pas une lecture exacte des valeurs (sauf s'ils sont définis par des coordonnées),
    - vous n'avez les informations que sur l'intervalle montré par la fenêtre.



    ⚠ Ne pas confondre la nature des trois objets :

    - il y a deux ensembles de nombres réels : l'axe des **abscisses** bleu qui contient les **antécédents**,
    et l'axe des **ordonnées** vert qui contient les **images**,
    - il y a la **courbe** rouge qui est un ensemble de **points**, de coordonnées (un **antécédent** ; son **image**).

    En particulier, ne pas confondre les abscisses et les ordonnées...

    Et attention au 0 antécédent et au 0 image qui sont au croisement des deux axes !

  - **Manière 4** : On vous donne une **information** qui explique comment on associe les antécédents et les images.
    Ça peut être un programme de calcul, une association entre deux objets géométriques, une association entre deux objets arithmétiques, voire une association concrète.

    Exemples : On peut définir une fonction qui associe chaque nombre au résultat d'un programme de calcul.
    Ou, en géométrie, une fonction qui associe l'arête d'un cube à l'aire du cube.
    Ou, en arithmétique, une fonction arithmétique qui associe chaque entier au nombre de facteurs premiers intervenant dans sa décomposition 😵.
    Ou une fonction concrète qui associe chaque élève à sa date de naissance (où ni les antécédents ni les images ne sont des nombres...).

<u>*Ce qu'il faut savoir faire*</u> :

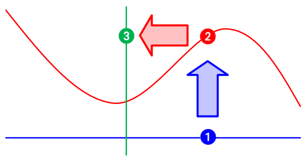
- **Déterminer des images et des antécédents par une fonction f**

  - <u>**Méthode 1**</u> : Si on me donne l'**expression** de $f(x)$:
    - je <u>calcule</u> l'image de a en <u>remplaçant</u> x par a dans l'expression de $f(x)$,
    - je <u>calcule</u> le ou les antécédents de b en <u>résolvant</u> l'équation expression de $f(x) = b$.

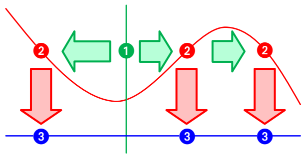
    ⚠ Le calcul d'antécédents suppose que l'équation est résoluble et que vous maîtrisez la technique (voir Fiche ALG 09).

  - <u>**Méthode 2**</u> : Si on me donne un **tableau de valeurs** :
    - je <u>lis</u> l'image de a dans la ligne des $f(x)$,
    - je <u>lis</u> des antécédents de b dans la ligne des x , mais attention, je ne sais pas s'ils y sont tous...

  - <u>**Méthode 3**</u> : Si on me donne la **courbe représentative** :

    - pour <u>lire</u> l'image de a :
      1) Je pars de l'**antécédent a** sur l'axe des abscisses.
      2) Je rejoins verticalement le point de la courbe d'abscisse a .
      3) Je rejoins horizontalement l'**image** sur l'axe des ordonnées.

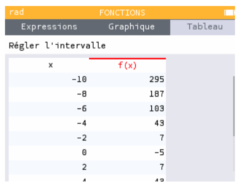
    

    - pour <u>lire</u> les antécédents de b :
      1) Je pars de l'**image b** sur l'axe des ordonnées.
      2) Je rejoins verticalement tous les points de la courbe d'ordonnée b .
      3) Je rejoins horizontalement **tous les antécédents** sur l'axe des abscisses.

- **Construire un tableau de valeurs à partir de l'expression**

  - <u>**Méthode 1**</u> : Sur papier :
    - je détermine la ligne des x avec la 1ère valeur, la dernière valeur et le pas,
    - je remplis la ligne des $f(x)$ en calculant les images (mais on peut tricher avec la Méthode 3...).

  - <u>**Méthode 2**</u> : Sur tableur :
    - je saisis les deux premières valeurs des x en A1 et A2,
      puis je "tire vers le bas" les deux cellules A1 et A2 (le pas est automatiquement reproduit),
    - je saisis en B1 l'expression de $f(x)$ en fonction de A1 précédée d'un = ,
      puis je "tire vers le bas" la cellule B1 jusqu'à la dernière valeur.

  - <u>**Méthode 3**</u> : Sur calculatrice, apprenez comment faire avec la vôtre.

- **Construire la courbe représentative** (ou **représenter graphiquement**) **à partir de l'expression**

  - <u>**Méthode 1**</u> : Sur papier :
    - je calcule des couples de coordonnées (nombre ; son image) ,
    - je place les points,
    - je relie le mieux possible les points (quitte à en ajouter aux endroits sensibles).

  - <u>**Méthode 2**</u> : Sur tableur :
    - je sélectionne les colonnes contenant les antécédents et les images,
    - j'insère un graphique de type *Nuage de points*.

  - <u>**Méthode 3**</u> : Sur *GeoGebra*, j'entre **f(x)=expression** dans la ligne de saisie et je tape $\boxed{\text{ENTER}}$.

- **Déterminer l'expression de $f(x)$ en fonction de x**

  - Ce sera dans le cas où la fonction associe un nombre au résultat d'un programme de calcul, ou dans le cas d'une fonction géométrique où il faudra utiliser ses connaissances (formules de grandeurs, théorèmes, ...).

<u>*Remarques sur les exercices*</u>

- L'exercice ① est un exercice de rédaction pour comprendre les manières de dire qu'un nombre est l'image d'un autre.
- Les exercices ② à ⑥ sont les classiques à maîtriser : utilisation des tableaux de valeurs, des courbes et des expressions.
- Les exercices ⑦ à ⑩ demandent de trouver une expression de fonction (les ⑨ et ⑩ sont en géométrie).
- L'exercice ⑪ propose deux fonctions sans expression, sans tableau de valeurs et sans courbe...
- Vous trouverez en dernière page comment rédiger des programmes en langage *Python* et un exercice ⑫.

① Traduire les phrases suivantes sous la forme : « *... est l'image de ... par ...* ».

a. -3 est un antécédent de 5 par g.

b. $F(-1) = 1$.

c. 14 a pour image $1{,}2$ par H.

d. $\frac{1}{3}$ a pour antécédent $\frac{5}{3}$ par f.

e. L'image de 250 par φ est nulle.

---

② La fonction f est connue par le tableau de valeurs ci-dessous :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	12	6	-1	-3	1	6	12	15

a. Déterminer les images de -2 et de 1 par f.

b. Combien 12 a-t-il d'antécédents par f ?

---

③ On donne les fonctions f et g définies par $f(x) = 5x - 1$ et par $g(x) = x^2 + 1$.

a. Déterminer les images de -7 et de $\frac{1}{3}$ par f.

b. Déterminer les images de 5, de -3 et de $\sqrt{5}$ par g.

c. Déterminer les antécédents de 76, de 1 et de -39 par f.

d. Déterminer les antécédents de 10, de 1 et de 0 par g.

e. Établir le tableau de valeurs de $f(x)$ pour x allant de 200 à 290 avec un pas de 10.

f. Établir le tableau de valeurs de $g(x)$ pour x allant de 5 à 5,9 avec un pas de 0,1.

g. Sur le tableur ci-contre, on veut obtenir le tableau de valeurs de la question **f.**.
Quelle formule faut-il saisir en B2 et copier jusqu'en B11 ?

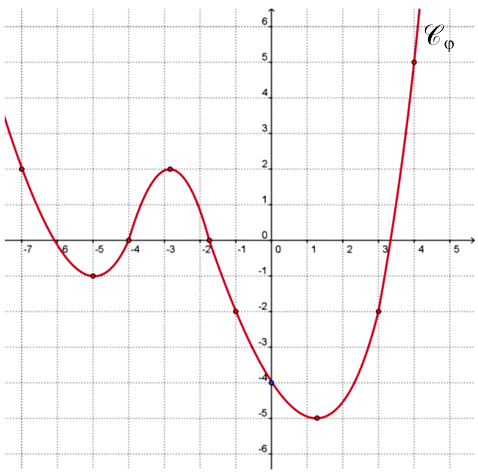
	A	B
1	x	g(x)
2	5	
3	5,1	
4	5,2	
5	5,3	
6	5,4	
7	5,5	
8	5,6	
9	5,7	
10	5,8	
11	5,9	

h. On donne en page 7 une annexe à imprimer pour faire cette question.
On a placé sur le graphique les points bleus de la courbe de f pour x valant 1 et 2.
On a également placé les points rouges de la courbe de g pour x valant 1 et 2.
Placer les points de ces deux courbes pour x allant de -5 à 5 avec un pas de 1.

---

④ On donne la représentation graphique de la fonction φ ci-contre.

On admet que la fenêtre donne toutes les informations et permet de répondre à toutes les questions.



a. Déterminer les images de 4 et de 0 par φ.

b. Déterminer les antécédents de -2 par φ.

c. Combien 0 possède-t-il d'antécédents ?
Quels sont ceux qui sont entiers ?

d. Donner un nombre qui n'a qu'un antécédent.

e. Donner un nombre qui possède trois antécédents.

f. Donner un nombre qui n'a pas d'antécédent.

g. Donner un encadrement de $\varphi(2)$ entre deux entiers consécutifs.

h. Donner un encadrement du plus grand antécédent de 2 entre deux entiers consécutifs.

---

⑤ On donne les fonctions F et G définies par $F(x) = 2 - 3x$ et par $G(x) = x^2 - 2x$.

a. Déterminer les images de $\frac{1}{6}$ et de $\sqrt{3}$ par F puis par G.

b. Déterminer les antécédents de -1 par F, puis par G.

c. Déterminer les antécédents de 0 par F, puis par G.

⑥ On donne la fonction $h : x \mapsto \sqrt{2x+3}$.

a. Calculer l'image de 3 par h .

b. Donner un nombre qui n'a pas d'image par h .

c. Un nombre négatif peut-il avoir une image par h ?

d. Donner un nombre qui n'a pas d'antécédent par h .

e. Donner la nature de l'image de 0 par h .

f. Trouver un autre nombre que 3 dont l'image est un nombre entier.

---

⑦ Les exercices sont indépendants.

1. Des tomates coûtent 2,30 € le kilo.
On définit la fonction P qui associe une masse de tomates (en kg) au prix payé (en €).
Déterminer l'expression de $P(x)$.

2. Dans une salle de spectacle, un abonnement annuel de 150 € permet de payer chaque séance 6,50 €.
On définit la fonction S qui associe le nombre de spectacles vus dans l'année à la somme totale déboursée (en €).
Déterminer l'expression de $S(x)$.

3. On définit la fonction A qui associe l'arête d'un cube (en cm) à l'aire du cube (en cm^2).
Déterminer l'expression de $A(x)$.

4. On définit la fonction V qui associe l'arête d'un cube (en cm) au volume du cube (en cm^3).
Déterminer l'expression de $V(x)$.

---

⑧ On donne le programme de calcul suivant :
- choisir un nombre
- le mettre au carré
- soustraire 4
- doubler

On définit la fonction G qui, à tout nombre, associe le résultat de ce programme de calcul.

a. Calculer l'image de 5 par G .

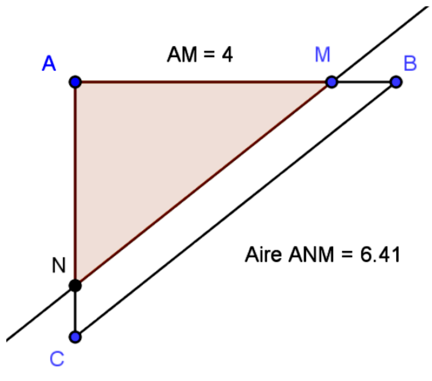
b. Calculer l'expression de $G(x)$.

c. Calculer les antécédents de 120 .

---

⑨ ABC est un triangle rectangle en A avec $AB = 5$ et $AC = 4$.
M est un point mobile de $[AB]$.
On pose $AM = x$.
La parallèle à (BC) passant par M coupe $[AC]$ en N .

On définit la fonction $\mathcal{A} : x \mapsto$ aire de AMN .



a. Quelles sont les valeurs prises par la variable x ?

b. On a construit la figure sur *GeoGebra* ci-contre.
En observant cette figure, écrire une phrase de la forme : « ... est l'image de ... par ... » .

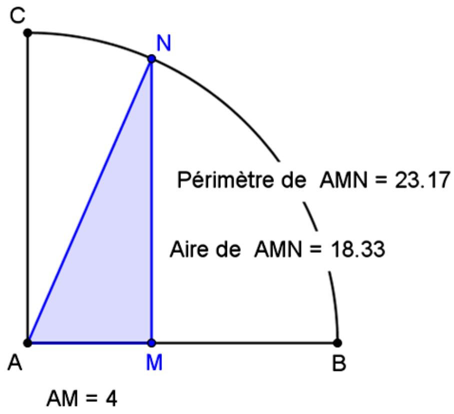
c. Dans cette question, $x = 4$.
Calculer AN et en déduire $\mathcal{A}(4)$.
Comparer avec la valeur donnée par *GeoGebra*.

d. Déterminer l'expression de $\mathcal{A}(x)$ en fonction de x .

e. En déduire pour quelle position de M l'aire vaut $4{,}9$.

⑩ Dans le quart de disque ci-contre, de rayon 10 , soit un point mobile M dans $[AB]$ et on pose $AM = x$.
La perpendiculaire à (AB) passant par M coupe $\overset{\frown}{BC}$ en N .
On définit les fonctions $\mathcal{P} : x \mapsto$ périmètre de AMN

et $\mathcal{A} : x \mapsto$ aire de AMN .



a. Quelles sont les valeurs prises par la variable x ?

b. Dans cette question, $x = 4$.
Calculer MN , arrondi à 10^{-2}, lorsque $x = 4$.
En déduire les images de 4 par les fonctions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{A}$, arrondie à 10^{-2}.

c. Déterminer les expressions de $\mathcal{P}(x)$ et de $\mathcal{A}(x)$ en fonction de x .

---

⑪ *Pour finir, deux fonctions vraiment sans expression…*

1. On définit la fonction Λ qui associe un entier supérieur à 2 au nombre de facteurs premiers de sa décomposition.

a. Déterminer les images de 12 , de 90 , de 2^{10} , de 49 000 et de $\dfrac{1}{3}$.

b. Déterminer les antécédents de 1 . Justifier.

c. Représenter graphiquement la fonction Λ pour les entiers de 2 à 20.

2. On définit la fonction Γ qui associe un entier supérieur à 2 au nombre de ses diviseurs positifs.

a. Calculer les images de 10 et de 11 .

b. Déterminer les antécédents de 2 . Justifier.

c. Déterminer les antécédents de 4 qui sont inférieurs ou égaux à 20 .

d. Représenter graphiquement la fonction Γ pour les entiers de 2 à 20.

Ce qu'il faut savoir faire en langage Python :

- **Définir une fonction informatique**

```
def f(x) :                      → définition de la fonction informatique comme la fonction mathématique
    return …                    → on retourne l'expression fonction de  x
```

Remarque : Attention à la syntaxe :
- les `:` à la fin de la 1ère ligne,
- un espace après `return` et pas de parenthèses.

Remarque : Attention à la saisie des calculs :
- il faut le `*` entre les facteurs (*Python* ne comprend pas `3x`, il faut écrire `3*x`),
- les puissances se notent avec `**` (x^3 s'écrit `x**3`),.

- **Afficher des images par une fonction f**

Commencer par définir la fonction, puis :

- Pour afficher l'image d'un seul nombre :

```
print(f(nombre))
```

- Pour afficher une série d'images :

```
for k in range(1ère valeur,dernière valeur+1,pas entier) :
    print(f(k))
```

Remarque : Par exemple, `range(10,21,2)` contient les entiers 10 ; 12 ; 14 ; 16 ; 18 et 20.
Mais `range(10,20,2)` contient les entiers 10 ; 12 ; 14 ; 16 et 18.
Un `range(10,21)` sans pas contient les entiers consécutifs 10 ; 11 ; 12 ; 13 ; … ; 18 ; 19 et 20.
Un simple `range(21)` contient les entiers consécutifs de 0 à 20.

Remarque : On peut faire un affichage mixte plus élégant : `print("L'image de",k,"est",f(k))` .

- **Construire des points de la courbe représentative à partir de l'expression**

La structure complète est :

```
from pylab import *             → importation de la bibliothèque qui permet de tracer des graphiques
def f(x) :                      → définition de la fonction informatique comme la fonction mathématique
    return …                    → on retourne l'expression fonction de  x
for k in range(…,…,…) :         → boucle de la 1ère à la dernière valeur avec un pas entier
    plot(k,f(k),"r+")           → placement de chaque point (rouge, en forme de +)
show()                          → affichage du graphique
```

Liste des couleurs : rouge → `r` ; vert → `g` ; noir → `k` ; jaune → `y` ; cyan → `c` ; magenta → `m`

Liste des formes : pixel → `,` ; plus → `+` ; fois → `x` ; petit point → `.` ; gros point → `o` ; carré → `s` ;
losange → `d` ; triangles → `v` ou `^` ou `<` ou `>` ; pentagone → `p` ; hexagone → `h` ; étoile → `*`

---

⑫ On donne la fonction $f : x \mapsto 5x - 2$.

a. Écrire un programme en *Python* qui définit la fonction informatique `f` et qui permet d'afficher les images $f(x)$ pour x allant de -10 à 10 avec un pas de 1 .

b. Modifier ce programme pour qu'il affiche en rouge les points de la courbe représentative de f pour x allant de -10 à 10 avec un pas de 1 .

On donne la fonction $g : x \mapsto 5x^2 - x - 2$.

c. Modifier le programme du **b.** pour définir en plus la fonction informatique `g` et afficher en rouge les points de la courbe de f et en bleu ceux de la courbe de g .

d. Sur le graphique qui s'affiche, les deux courbes semblent avoir deux points communs. Lesquels ?
Le vérifier par le calcul.

e. Modifier le programme du **c.** pour afficher les points avec un pas de $0{,}1$.

Annexe pour la question **h.** de l'exercice ③