Initiation au RAISONNEMENT PAR L'ABSURDE pour démontrer la nature d'un nombre

Ce qu'il faut savoir faire :

Pour démontrer une propriété $\mathscr{P}$, le principe du **raisonnement par l'absurde** est le suivant :

1. Je fais la **supposition** contraire de ce que je dois démontrer :
   je suppose que $\mathscr{P}$ est fausse, c'est-à-dire que le contraire de $\mathscr{P}$ est vrai.
2. De cette hypothèse, je vais déduire une série de conséquences dont une sera impossible.
3. Cela signifie alors que la supposition de départ est **absurde** : il est impossible que $\mathscr{P}$ soit fausse !
   Donc $\mathscr{P}$ est vraie : CQFD.

Remarque :

CQFD signifie « *Ce Qu'il Fallait Démontrer* » .
Vous pouvez utiliser la version en latin « *Quod erat demonstrandum* » , ça fait très chic.

Rappels :

- Un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ avec a et n entiers relatifs.
- Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction $\frac{a}{b}$ avec a et b entiers relatifs.

Remarques sur les exercices :

- Les exercices ①, ② et ③ se ressemblent et travaillent sur les décimaux.
  Les débutants peuvent s'aider de la correction du ① pour faire les autres.
- Les exercices ④ à ⑦ se ressemblent et travaillent sur les rationnels.
  Les débutants peuvent s'aider de la correction du ④ pour faire les autres.

---

① Démontrer par l'absurde que $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.

---

② Démontrer par l'absurde que $\frac{7}{3}$ n'est pas décimal.

---

③ Démontrer par l'absurde que $\frac{1}{7}$ n'est pas décimal.

---

④ Dans cet exercice, on sait que $\sqrt{5}$ n'est pas rationnel.
Démontrer par l'absurde que $1 + \sqrt{5}$ n'est pas rationnel.

---

⑤ Dans cet exercice, on sait que $\sqrt{3}$ est irrationnel.
Démontrer par l'absurde que $2 + 5\sqrt{3}$ est lui aussi irrationnel.

---

⑥ Dans cet exercice, on sait que π est irrationnel.
Démontrer par l'absurde que $1 - \pi$ est lui aussi irrationnel.

---

⑦ Dans cet exercice, on sait que π est irrationnel.
Démontrer par l'absurde que $\sqrt{\pi}$ est lui aussi irrationnel.