

Savoir CALCULER AVEC DES VARIATIONS

Ce qu'il faut comprendre

- **La différence entre un pourcentage de proportion et un pourcentage de variation**

- Dans « 54 % des élèves sont des filles », le pourcentage est la proportion des élèves représentant les filles. Il décrit une situation fixe.
- Dans « Le nombre de filles a augmenté de 54 % », le pourcentage représente l'augmentation des filles. Il décrit une situation qui évolue dans le temps.
Attention, c'est une proportion... C'est la proportion du nombre initial de filles représentant les filles qu'il faut ajouter.

Ce qu'il faut savoir

- **Les trois formules qui lient** $\left\{ \begin{array}{l} \text{le taux de variation } e \% \\ \text{la grandeur avant variation } n_1 \text{ (valeur initiale)} \\ \text{la grandeur après variation } n_2 \text{ (valeur finale)} \end{array} \right.$

- On parle de variation ou parfois d'évolution.
- La **variation absolue** est $n_2 - n_1$ et la **variation relative** est $\frac{n_2 - n_1}{n_1}$, qu'on appelle aussi **taux de variation**.

Il s'exprime généralement par le **pourcentage de variation** : $e \% = \frac{n_2 - n_1}{n_1}$ qu'on peut calculer avec $e \% = \frac{n_2}{n_1} - 1$.

Il est $\left\{ \begin{array}{l} \text{positif dans le cas d'une augmentation (housse)} \\ \text{négatif dans le cas d'une diminution (baisse).} \end{array} \right.$

- On en déduit le calcul de la **grandeur après variation** $n_2 = n_1 \times (1 + e \%)$

et le calcul de la **grandeur avant variation** $n_1 = \frac{n_2}{1 + e \% }$.

Attention, pour une diminution,
1 + e % s'écrit
avec une **soustraction**
car e % est négatif

- Dans ces deux formules, on utilise le **coefficent multiplicateur** $CM = 1 + e \%$, et donc : $e \% = CM - 1$.

Comprenez bien le lien entre $e \%$ et CM , ce sont les deux outils essentiels...

Remarque : Ne cherchez pas à retenir toutes ces formules au risque de les mélanger.

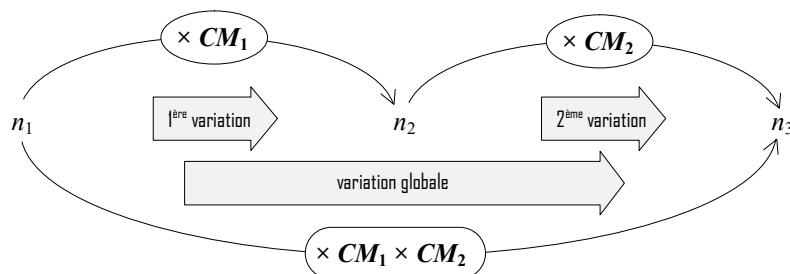
Retenez-en une et les autres s'en déduisent facilement.

Exemple 1 : Avec une augmentation de 7%, CM vaut $1 + 0,07$ et on a $n_1 \xrightarrow{\times 1,07} n_2$.

Exemple 2 : Avec une diminution de 7%, CM vaut $1 - 0,07$ et on a $n_1 \xrightarrow{\times 0,93} n_2$.

- **Les formules avec des variations successives**

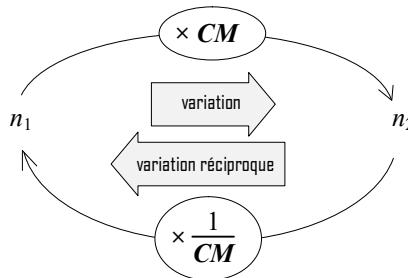
- Si une grandeur n_1 subit $\left\{ \begin{array}{l} \text{une première variation de taux } e_1 \% \text{ et de coefficient multiplicateur } CM_1 = 1 + e_1 \% \\ \text{puis une seconde variation de taux } e_2 \% \text{ et de coefficient multiplicateur } CM_2 = 1 + e_2 \% , \end{array} \right.$ alors la variation globale a pour coefficient multiplicateur $CM_g = CM_1 \times CM_2$.



- De la formule $CM_g = CM_1 \times CM_2$, on déduit $CM_1 = \frac{CM_g}{CM_2}$ et $CM_2 = \frac{CM_g}{CM_1}$.
- Le **taux de variation global** $e_g \%$ se calcule avec $e_g \% = CM_g - 1$, c'est-à-dire $e_g \% = (1 + e_1 \%)(1 + e_2 \%) - 1$.
- On généralise ces formules à plus de deux variations successives : $CM_g = CM_1 \times CM_2 \times CM_3$, et ainsi de suite.
- Si on répète n fois la même variations, on a $CM_g = (CM_1)^n$.

• Les formules avec une variation réciproque

- Si une grandeur n_1 subit une variation de taux $e\%$ et de coefficient multiplicateur $CM = 1 + e\%$, on revient à sa **valeur initiale** avec la variation réciproque qui a pour coefficient multiplicateur réciproque $CM_r = \frac{1}{CM}$.



- Le **taux de variation réciproque** $e_r\%$ se calcule avec $e_r\% = CM_r - 1$, c'est-à-dire $e_r\% = \frac{1}{1 + e\%} - 1 = \frac{-e\%}{1 + e\%}$.

⚠️ Après une variation de $e\%$, on ne revient pas à la valeur initiale avec une variation de $-e\%$!

Ainsi, pour annuler une augmentation de 25 %, on ne diminue pas de 25 % mais de 20 % car $\frac{1}{1 + 0,25} - 1 = -0,20$.

Ce qu'il faut savoir faire

• Calculer une grandeur avant ou après variations

- Je choisis les coefficients multiplicateurs CM en faisant attention au signe de $e\%$.

Exemples : Travaillez vos automatismes :

- Si on **augmente** de 15 %, le coefficient est $1 + 15\% = 1,15$ (car c'est $1 + 0,15$).
- Si on **augmente** de 5 %, le coefficient est $1 + 5\% = 1,05$ (attention, $1 + 0,05$ ne fait pas 1,5 !).
- Si on **augmente** de 0,5 %, le coefficient est $1 + 0,5\% = 1,005$ (car c'est $1 + 0,005$).
- Si on **augmente** de 150 %, le coefficient est $1 + 150\% = 2,50$ (car c'est $1 + 1,50$).
- Si on **diminue** de 15 %, le coefficient est $1 - 15\% = 0,85$ (car c'est $1 - 0,15$).
- Si on **diminue** de 5 %, le coefficient est $1 - 5\% = 0,95$ (car c'est $1 - 0,05$).
- Si on **diminue** de 0,5 %, le coefficient est $1 - 0,5\% = 0,995$ (car c'est $1 - 0,005$).

Remarquez qu'on ne peut pas diminuer de 150 %...

- En cas de variations successives, je calcule le coefficient multiplicateur global $CM_g = (1 + e_1\%) \times (1 + e_2\%) \times \dots$.

- Si je calcule la grandeur **après** variations, je **multiplie** par le coefficient multiplicateur.

Si je calcule la grandeur **avant** variations, je **divise** par le coefficient multiplicateur.

• Calculer un taux de variation simple, global ou réciproque

- Si on connaît les grandeurs avant et après variation, on applique la formule $e\% = \frac{n_2 - n_1}{n_1}$ ou $e\% = \frac{n_2}{n_1} - 1$.

⚠️ Ne pas confondre e et $e\%$!

Par exemple, si un prix passe de 80 € à 90 €, on peut calculer le taux de variations de deux manières :

La manière la plus directe : $\frac{90 - 80}{80}$ (ou $\frac{90}{80} - 1$) = 0,125 = 12,5 % donc le taux de variation est 12,5 %.

On voit aussi : $\frac{90 - 80}{80} \times 100 = 12,5$, mais attention, c'est le nombre de pourcents et non le pourcentage !

Il est donc faux d'écrire : $\frac{90 - 80}{80} \times 100 = 12,5\% !!!$

- Pour un taux de variation global de plusieurs variations successives :

- On calcule le coefficient multiplicateur global CM_g par produit.
- On applique la formule $e_g\% = CM_g - 1$.

- Pour un taux de variation réciproque qui permet de revenir à la valeur initiale :

- On calcule le coefficient multiplicateur réciproque CM_r par inverse.
- On applique la formule $e_r\% = CM_r - 1$.

Remarques sur les exercices :

- L'exercice ① permet de réviser les calculs de grandeurs et de pourcentage de variation après ou avant une seule variation.
- L'exercice ② est purement technique, sur les calculs de taux de variations successives et réciproques.
- Les exercices ③ à ⑤ proposent des situations concrètes.

① Les dix exercices sont indépendants.

1. Un article coûtant 1 520 € voit son prix augmenté de 7,5%.
Calculer son prix après augmentation.
2. Le prix d'un article passe de 52,50 € à 58,80 €.
Déterminer la variation.
3. Un volume de 2,5 L d'eau diminue de 80%.
Calculer le volume d'eau après diminution.
4. Un garçon de 10 ans pèse en moyenne 32 kg.
Jusqu'à l'âge adulte, son poids augmentera de 150%.
Calculer le poids moyen d'un adulte.
5. Au Brésil, l'*Institut national de recherche spatiale* a mesuré que la forêt amazonienne sur le territoire brésilien, originellement de 4 100 000 km², a été réduit à 3 400 000 km² en 2005.
Déterminer la variation, arrondie à 0,1 %.
6. Avec l'ajout d'une option, le prix d'une voiture a subi une hausse de 0,8%.
Elle coûte alors 32 709,60 €.
Quel est son prix sans cette option ?
7. J'ai oublié une bouteille de 1,5 L d'eau au soleil.
Quelques jours plus tard, il ne me reste qu'un fond de 30 cL.
Quel est le pourcentage de variation du contenu de ma bouteille ?
8. Une route a été retracée et diminue ainsi la distance entre deux villages de 6%.
Sachant que ces deux villages sont maintenant à 14,5 km l'un de l'autre, de quelle distance étaient-ils séparés avant les travaux ? Arrondir à 10 m près.
9. Une ville compte 75 240 habitants en 2020.
Sa population entre 1950 et 2020 a augmenté de 260%.
Combien y avait-il d'habitants en 1950 ?
10. On donne le tableau de populations suivant où les chiffres sont en millions d'habitants :

	Nigéria	France	Japon
2020	208,33	67,57	126,26
2021	213,40	67,75	125,68

Déterminer les pourcentages de variation de population de ces trois pays, arrondi à 0,01 %.

② Les douze exercices sont indépendants.

1. Une grandeur augmente de 25 % puis de 35%.
Calculer le taux d'augmentation global en %.
2. Une grandeur diminue de 2,5 % puis de 0,8%.
Calculer le pourcentage de diminution global.
3. Une grandeur augmente de 12 % puis diminue de 15%.
Calculer le pourcentage de variation global.
4. Une grandeur augmente de 15 % puis diminue de 12 %.
Calculer le taux d'évolution global.

5. Une grandeur baisse de 90 % puis augmente de 120 %.
Calculer le pourcentage de variation global.
6. Une grandeur augmente de 100 % puis diminue de 50 %.
Calculer le pourcentage de variation global.
7. Une grandeur augmente deux fois de suite de 15 %.
Quel est le pourcentage de hausse global ?
8. Une grandeur baisse trois fois de suite de 1,5 %.
Quel est le taux de baisse global, arrondi à 0,1 %.
9. Une grandeur baisse cinq fois de suite de 10 %.
Quel est le pourcentage de baisse global, arrondi à 0,1 %.
10. Une grandeur a été augmentée deux fois de suite d'un même taux.
Ces deux augmentations correspondent à une augmentation globale de 96 %.
Quel est le taux d'augmentation qui a été appliqué deux fois ?
11. Une grandeur a été augmentée de 28 %.
Quel taux de diminution réciproque faut-il appliquer pour retrouver la valeur initiale de la grandeur ?
12. Une grandeur a baissé de 40 %.
Quel taux d'augmentation réciproque faut-il appliquer pour retrouver la valeur initiale de la grandeur ?
Arrondir à 0,1 %.

(3) Les trois exercices sont indépendants.

1. Un prix augmente de 15 % puis augmente de 20 %.
 - a. Calculer le taux de variation global.
 - b. Si le prix avant les deux augmentations était de 150 €, quel est le prix après les deux augmentations ?
2. Une ville a vu sa population baisser de 5,5 % puis augmenter de 4 %.
 - a. Calculer le taux d'évolution global.
En déduire comment la population a évolué.
 - b. S'il y a 254 800 habitants dans la ville, combien y avait-il d'habitants avant les deux évolutions ?
3. Le volume d'eau contenu dans un réservoir est passé en octobre de 140 L à 175 L, puis a baissé de 3 % en novembre.
 - a. Calculer le taux de variation global sur ces deux mois.
 - b. Quel est le volume à la fin du mois de novembre ?
4. Dans un restaurant, une réserve de farine a baissé successivement de 7 %, de 3 % puis de 5 %.
 - a. Calculer le taux de variation global, arrondi à 0,1 %.
 - b. S'il reste environ 23 kg de farine après les trois prélèvements, quelle masse y avait-il avant ?
5. Entre 2015 et 2018, le prix d'une maison a augmenté globalement de 15 %. De 2015 à 2016, il avait augmenté de 5 % et de 2016 à 2017, il avait augmenté de 3 %. Calculer le taux d'augmentation de 2017 à 2018.

(4) Les trois exercices sont indépendants.

1. Un prix a augmenté de 16 %.
 - a. Quelle variation doit subir ce prix pour revenir à sa valeur initiale ? Arrondir à 0,01 %.
 - b. Augmenter 100 € de 16 % puis le baisser du pourcentage obtenu à la question a. .
2. Une masse de sel dans une solution a diminué de 3,25 %.
De quel taux doit-on augmenter la masse de sel pour revenir à la masse avant diminution ? Arrondir à 0,01 %.
3. Un pilote augmente la vitesse de son avion de 1 % puis de 5 %.
De quel pourcentage doit-il diminuer sa vitesse pour revenir à la vitesse initiale avant les deux accélérations ?
Arrondir à 0,1 %.

⑤ Les trois exercices sont indépendants.

1. Une somme d'argent augmente de 2 % chaque année.

Calculer le taux d'augmentation global sur 5 ans, puis sur 10 ans.

Arrondir à 0,1 %.

2. Un savon de 200 g perd 0,5 % de sa masse à chaque lavage de mains.

Calculer la masse de savon après une centaine de lavages.

3. Dans mon jeu vidéo, j'ai obtenu deux fois de suite le même bonus et je suis passé de 12 000 points à 15 870 points.

Ce bonus augmente mes points d'un certain pourcentage.

Calculer ce pourcentage.