Savoir RÉSOUDRE ALGÉBRIQUEMENT UNE INÉQUATION " SIGNE D'UN QUOTIENT "

Ce qu'il faut savoir faire

- **Résoudre une inéquation de la forme « *signe d'un quotient* »**

  - Il s'agit de la forme $\boxed{\dfrac{\text{expression } N}{\text{expression } D} > 0}$ où :

    - l'*expression N* du numérateur et l'*expression D* du dénominateur sont des expressions affines de l'inconnue x ;
    - « >0 » traduit que le quotient doit être du signe strictement positif, mais on peut avoir les autres signes « $\geqslant 0$ » ou « <0 » ou « $\leqslant 0$ ».

    Remarque : Le quotient peut avoir plusieurs expressions en numérateur ($\dfrac{(\text{expression } N_1)\,(\text{expression } N_2)}{\text{expression } D}$),

    plusieurs expressions en dénominateur ($\dfrac{\text{expression } N}{(\text{expression } D_1)\,(\text{expression } D_2)}$) ou même les deux.

    Mais la méthode restera la même.

  - **Méthode**

    *La méthode ressemble beaucoup à celle des inéquations « signe d'un produit » (revoir la fiche **ALG 10**).*

    1) On fait un tableau de signes avec :
       - une **ligne des** $\boxed{\text{signes de } \textit{expression } N}$, en trouvant l'abscisse d'annulation et l'ordre des signes,
       - une **ligne des** $\boxed{\text{signes de } \textit{expression } D}$, de la même manière.
    2) On en déduit une **ligne des** $\boxed{\text{signes du quotient}}$:
       - en reportant le zéro de *expression N* ,
       - en mettant une double barre de valeur interdite sous le zéro de *expression D* (c'est la nouveauté),
       - en appliquant dans chaque colonne la règle des signes : $\begin{cases} + \text{ par } + \text{ fait } + \\ + \text{ par } - \text{ fait } - \\ - \text{ par } + \text{ fait } - \\ - \text{ par } - \text{ fait } + . \end{cases}$

       Le " **par** " fonctionne pour " **multiplié par** " ou " **divisé par** ".
    3) On regarde le signe demandé par l'inéquation.
       On cherche dans la **ligne des** $\boxed{\text{signes du quotient}}$ les cases qui contiennent ce signe.
    4) Dans la **ligne de** $\boxed{x}$, on trouve tous les intervalles correspondants.
       C'est la réunion de tous ces intervalles qui forme l'**ensemble des solutions** $\mathscr{S}$ de la conclusion.

       Remarque : Il peut n'y avoir qu'un seul intervalle...

       ⚠ Attention aux crochets des abscisses !

       Autour de l'abscisse qui annule *expression N* $\rightarrow \begin{cases} \text{les ouvrir si vous avez « } >0 \text{ » ou « } <0 \text{ »} \\ \text{les fermer si vous avez « } \geqslant 0 \text{ » ou « } \leqslant 0 \text{ ».} \end{cases}$

       Autour de l'abscisse qui annule *expression D* $\rightarrow$ toujours les ouvrir.

- **Se ramener à une inéquation de la forme « *signe d'un quotient* »**

  1) Si besoin, annuler le membre de droite pour avoir 0 et se ramener à une étude de signe.
  2) Factoriser pour se ramener à un quotient d'expressions affines du type $ax + b$.

     ⚠ Ici, factoriser signifie :
     - d'abord réduire au même dénominateur pour avoir un quotient (si besoin),
     - puis factoriser le numérateur et le dénominateur en produits d'expressions affines du type $ax + b$.

Remarque sur les exercices

- Il y a beaucoup d'inéquations qui se ressemblent dans cette fiche. Cela permet de s'entraîner.
  Pour voir uniquement celles qui sont particulières, suivez les ♣.
- L'exercice ① propose des inéquations de base, où tout est déjà bien factorisé.
- Dans l'exercice ②, vous avez déjà le quotient mais il faudra factoriser le numérateur et le dénominateur.
- Dans l'exercice ③, vous n'avez même pas le quotient...

① Résoudre les inéquations suivantes :

a. $\dfrac{3x+6}{5-x} \leqslant 0$ ♣

b. $\dfrac{-3+2x}{1-4x} \geqslant 0$ ♣

c. $\dfrac{5x}{1+x} < 0$

d. $\dfrac{(7-x)(x+2)}{1-x} > 0$ ♣

e. $\dfrac{6x+1}{(2x-5)(6x-1)} \geqslant 0$ ♣

f. $\dfrac{(3x-11)(9+3x)}{(4x-2)(-5x+15)} \leqslant 0$

g. $\dfrac{-2x}{(3x-6)^2} < 0$ ♣

h. $\dfrac{20x(1-x)^2}{(1+10x)^2} \leqslant 0$

i. $\dfrac{-2}{(x+5)(1-3x)} \geqslant 0$ ♣

Attention à celle-ci... un petit trouble-fête s'est invité...

② Résoudre les inéquations suivantes :

a. $\dfrac{1}{x^2-4} > 0$ ♣

b. $\dfrac{4x^2-9}{2-3x} \leqslant 0$

c. $\dfrac{x}{x^2-2x+1} \geqslant 0$

d. $\dfrac{25x-16x^2}{x^2+1} \geqslant 0$ ♣

③ Résoudre les inéquations suivantes :

a. $\dfrac{1}{x+1}+1 > 0$ ♣

b. $\dfrac{1}{x+1} \geqslant 1$ ♣

c. $\dfrac{1}{x-1} \geqslant -1$

d. $\dfrac{1}{x-1} \geqslant 1$

e. $\dfrac{1}{x-2} < 5$ ♣

f. $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x+1} \leqslant 0$ ♣

g. $\dfrac{1}{x+1} \geqslant \dfrac{1}{x-2}$ → Attention au petit trouble-fête...

h. $\dfrac{1}{x+2}+x > 0$