Correction de 2de - CALCUL ALGÉBRIQUE - Fiche 11

① **a.** Étape 1 : je cherche l'abscisse qui annule le numérateur et donc tout le quotient.

Annulation du numérateur :

$3x+6=0 \Leftrightarrow x=-2$

Étape 2 : je cherche l'abscisse qui annule le dénominateur et qui sera donc valeur interdite.

Valeur interdite :

$5-x=0 \Leftrightarrow x=5$

Étape 3 : je fais la ligne des $\boxed{x}$ en y plaçant les deux abscisses d'annulation (dans le bon ordre !)

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$

Étape 4 : j'ajoute la ligne des $\boxed{\text{signes de } 3x+6}$

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
signes de $3x+6$		$-$	0	$+$	|	$+$	

coefficient directeur 3 positif donc $-$ puis $+$

ne pas oublier la séparation en 5 qui servira par la suite

Étape 5 : j'ajoute la ligne des $\boxed{\text{signes de } 5-x}$

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
signes de $3x+6$		$-$	0	$+$	|	$+$	
signes de $5-x$		$+$	|	$+$	0	$-$	

coefficient directeur -1 négatif donc $+$ puis $-$

Étape 6 : j'en déduis la ligne des $\boxed{\text{signes du quotient}}$

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
signes de $3x+6$		$-$	0	$+$	|	$+$	
signes de $5-x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
signes du quotient		$-$	0	$+$	||	$-$	

$-$ par $+$ fait $-$

$+$ par $+$ fait $+$

$+$ par $-$ fait $-$

mais le 0 du dénominateur donne une valeur interdite, donc une double barre

je reporte le 0 du numérateur

Étape 7 : je regarde quel signe est demandé dans l'inéquation $\dfrac{3x+6}{5-x} \leqslant 0$:

il faut que le produit soit **négatif ou nul**

Étape 8 : je cherche les cases avec un $-$ dans la ligne $\boxed{\text{signes du quotient}}$ et je prends le 0

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
signes de $3x+6$		$-$	0	$+$	|	$+$	
signes de $5-x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
signes du quotient		$-$	0	$+$	||	$-$	

Étape 9 : je remonte dans la ligne des $\boxed{x}$ en incluant -2 mais pas 5 :

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
signes de $3x+6$		$-$	0	$+$	|	$+$	
signes de $5-x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
signes du quotient		$-$	0	$+$	||	$-$	

Étape 10 : je traduis les zones bleues en un ensemble de solutions : $\mathcal{S} = \left]-\infty\,;-2\right] \cup \left]5\,;+\infty\right[$

b. Annulation du numérateur :

$-3 + 2x = 0 \iff x = \frac{3}{2}$

Valeur interdite :

$1 - 4x = 0 \iff x = \frac{1}{4}$

x	$-\infty$		$1/4$		$3/2$		$+\infty$
signes de $-3 + 2x$		$-$		$-$	0	$+$	
signes de $1 - 4x$		$+$	0	$-$		$-$	
signes du quotient		$-$	‖	$+$	0	$-$	

$\mathscr{S} = \left]\frac{1}{4} ; \frac{3}{2}\right]$

---

c. Annulation du numérateur : $5x = 0 \iff x = 0$
Valeur interdite : $1 + x = 0 \iff x = -1$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
signes de $5x$		$-$		$-$	0	$+$	
signes de $1 + x$		$-$	0	$+$		$+$	
signes du quotient		$+$	‖	$-$	0	$+$	

$\mathscr{S} =]-1 ; 0[$ $\longrightarrow$ *On exclut les deux bornes, -1 car elle est valeur interdite et 0 car on veut la stricte négativité.*

---

d. Annulations du numérateur : $\longrightarrow$ Annulations *au pluriel.*

$7 - x = 0 \iff x = 7$

$x + 2 = 0 \iff x = -2$

Valeur interdite :

$1 - x = 0 \iff x = 1$

x	$-\infty$		-2		1		7		$+\infty$
signes de $7 - x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
signes de $x + 2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
signes de $1 - x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
signes du quotient		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

$\mathscr{S} =]-2 ; 1[\cup]7 ; +\infty[$

---

e. Annulation du numérateur :

$6x + 1 = -\frac{1}{6}$

Valeurs interdites : $\longrightarrow$ Valeurs interdites *au pluriel.*

$2x - 5 = 0 \iff x = \frac{5}{2}$

$6x - 1 = 0 \iff x = \frac{1}{6}$

x	$-\infty$		$-1/6$		$1/6$		$5/2$		$+\infty$
signes de $6x + 1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
signes de $2x - 5$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
signes de $6x - 1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
signes du quotient		$-$	0	$+$	‖	$-$	‖	$+$	

$\mathscr{S} = \left[-\frac{1}{6} ; \frac{1}{6}\right[\cup \left]\frac{5}{2} ; +\infty\right[$ $\longrightarrow$ *Attention aux crochets !*

---

f. Annulations du numérateur :

$3x - 11 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{11}{3}$

$9 + 3x = 0 \Leftrightarrow x = -3$

Valeurs interdites :

$4x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

$-5x + 15 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

x	$-\infty$		-3		$1/2$		3		$11/3$		$+\infty$
signes de $3x - 11$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
signes de $9 + 3x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
signes de $4x - 2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
signes de $-5x + 15$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
signes du quotient		$-$	0	$+$	‖	$-$	‖	$+$	0	$-$	

$\mathscr{S} = \left]-\infty ; -3\right] \cup \left]\frac{1}{2} ; 3\right[\cup \left[\frac{11}{3} ; +\infty\right[$

---

g. Annulation du numérateur : $-2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ → Attention à cette équation très simple qui provoque parfois des bêtises... La solution n'est pas 2 .

Valeur interdite : $3x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ → Inutile de résoudre $(3x-6)^2 = 0$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
signes de $-2x$		$+$	0	$-$		$-$	
signes de $3x - 6$		$-$		$-$	0	$+$	
signes de $(3x-6)^2$		$+$		$+$	0	$+$	
signes du quotient		$+$	0	$-$	‖	$-$	

→ Attention !
Cette ligne sert uniquement à remplir la ligne des signes de $(3x-6)^2$ ...
Il ne faut surtout pas la compter pour la ligne finale !
On pourrait d'ailleurs ne pas la montrer...

$\mathscr{S} = \left[0 ; 2\right[\cup \left]2 ; +\infty\right[$

---

h. Annulations du numérateur :

$20x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Valeur interdite :

$1 + 10x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{10}$

x	$-\infty$		$-1/10$		0		1		$+\infty$
signes de $20x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
signes de $1 - x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
signes de $(1-x)^2$		$+$		$+$		$+$	0	$+$	
signes de $1 + 10x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
signes de $(1+10x)^2$		$+$	0	$+$		$+$		$+$	
signes du quotient		$-$	‖	$-$	0	$+$	0	$+$	

Ces lignes servent uniquement à remplir les lignes des signes des carrés.
Attention à ne pas les compter pour la ligne finale !

$\mathscr{S} = \left]-\infty ; -\frac{1}{10}\right[\cup \left]-\frac{1}{10} ; 0\right] \cup \{1\}$ → Ne pas oublier 1 !

i. Il n'y a pas d'annulation du numérateur....
Le trouble-fête est bien sûr -2 ...
Il est fort conseillé de faire une ligne pour -2 dans le tableau.

Valeurs interdites :
$x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5$
$1 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$

x	$-\infty$	-5		$1/3$	$+\infty$
signe de -2	$-$		$-$		$-$
signes de $x+5$	$-$	0	$+$		$+$
signes de $1-3x$	$+$		$+$	0	$-$
signes du quotient	$+$	‖	$-$	‖	$+$

$\mathscr{S} =]-\infty\,;-5[\cup]\frac{1}{3}\,;+\infty[$

② **a.** Je dois d'abord factoriser le dénominateur :
$\frac{1}{x^2-4} > 0$
$\Leftrightarrow \frac{1}{(x+2)(x-2)} > 0$ → Avec une identité remarquable.

Je cherche les deux valeurs interdites, puis je fais un tableau de signes avec les lignes des signes de $x+2$ et de $x-2$.

Correction non détaillée : $\mathscr{S} =]-\infty\,;-2[\cup]2\,;+\infty[$

b. Cette fois, c'est le numérateur que je dois d'abord factoriser :
$\frac{4x^2-9}{2-3x} \leqslant 0$
$\Leftrightarrow \frac{(2x+3)(2x-3)}{2-3x} \leqslant 0$ → Avec la même identité remarquable.

Correction non détaillée : $\mathscr{S} = [-\frac{3}{2}\,;\frac{2}{3}[\cup [\frac{3}{2}\,;+\infty[$

c. $\frac{x}{x^2-2x+1} \geqslant 0$
$\Leftrightarrow \frac{x}{(x-1)^2} \geqslant 0$ → Je factorise le dénominateur, avec une autre identité remarquable.

Correction non détaillée : $\mathscr{S} = [0\,;1[\cup]1\,;+\infty[$

d. On a envie de factoriser le numérateur et le dénominateur.
Mais attention...

$\frac{25x-16x^2}{x^2+1} \geqslant 0$
$\Leftrightarrow \frac{x(25-16x)}{x^2+1} \geqslant 0$ → Je factorise le numérateur avec x en facteur commun (attention, pas d'identité remarquable malgré 25 et 16 !).

Annulations du numérateur :
$x = 0$
$25 - 16x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{25}{16}$

Valeur interdite :
$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$: c'est une équation impossible car un carré n'est jamais négatif.

Il n'y aura donc pas de valeur interdite !!!
Et on pourra retenir que $x^2 + 1$ ne se factorise pas.

Correction non détaillée : $\mathscr{S} = [0\,;\frac{25}{16}]$

③ **a.** La difficulté vient ici du $+1$ ... À cause de lui, on n'a pas un quotient...
Il faut donc factoriser en quotient avec une réduction au même dénominateur :

$\dfrac{1}{x+1}+1 > 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+1} > 0$ → Je réduis au même dénominateur $x+1$.

$\Leftrightarrow \dfrac{1+x+1}{x+1} > 0$ → J'additionne.

$\Leftrightarrow \dfrac{2+x}{x+1} > 0$ → J'obtiens bien le signe d'un quotient.

Correction non détaillée : $\mathscr{S} = \,]-\infty\,;-2\,[\,\cup\,]-1\,;+\infty\,[$

---

b. $\dfrac{1}{x+1} \geqslant 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x+1}-1 \geqslant 0$ → J'annule le membre de droite. Du coup, ça ressemble à la précédente, mais attention, il va y avoir un problème...

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x+1}-\dfrac{x+1}{x+1} \geqslant 0$ → Je réduis au même dénominateur $x+1$.

$\Leftrightarrow \dfrac{1-x-1}{x+1} \geqslant 0$ → Attention au changement de signe de $+1$: $\dots-\dfrac{x+1}{x+1}$ devient $\dfrac{\dots-x-1}{x+1}$ (on peut passer par l'étape $\dfrac{\dots-(x+1)}{x+1}$).

$\Leftrightarrow \dfrac{-x}{x+1} \geqslant 0$

Correction non détaillée : $\mathscr{S} = \,]-1\,;0\,]$

---

c. $\dfrac{1}{x-1} \geqslant -1$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x-1}+1 \geqslant 0$ → J'annule le membre de droite.

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x-1}+\dfrac{x-1}{x-1} \geqslant 0$ → Je réduis au même dénominateur $x-1$.

$\Leftrightarrow \dfrac{1+x-1}{x-1} \geqslant 0$ → Pas de problème de signe ici, car ce n'est qu'une addition.

$\Leftrightarrow \dfrac{x}{x-1} \geqslant 0$

Correction non détaillée : $\mathscr{S} = \,]-\infty\,;0\,]\,\cup\,]\,1\,;+\infty\,[$

---

d. $\dfrac{1}{x-1} \geqslant 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x-1}-1 \geqslant 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x-1}-\dfrac{x-1}{x-1} \geqslant 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1-x+1}{x-1} \geqslant 0$ → Problème de signe ici, à cause de la soustraction.

$\Leftrightarrow \dfrac{-x}{x-1} \geqslant 0$

Correction non détaillée : $\mathscr{S} = [\,0\,;1\,[$

---

e. $\dfrac{1}{x-2} < 5$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x-2}-5 < 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x-2}-\dfrac{5(x-2)}{x-2} < 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1-5x+10}{x-2} < 0$ → Attention, on distribue le 5 et le $-$: $\dots-\dfrac{5(x-2)}{x-2}$ devient $\dfrac{\dots-5x+10}{x-2}$ (on peut passer par $\dfrac{\dots-5(x-2)}{x-2}$).

$\Leftrightarrow \dfrac{9-5x}{x-2} < 0$

Correction non détaillée : $\mathscr{S} = \,]-\infty\,;\dfrac{9}{5}\,[\,\cup\,]\,2\,;+\infty\,[$

---

f. $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x+1} \leqslant 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x+1}{(x-2)(x+1)}+\dfrac{x-2}{(x-2)(x+1)} \leqslant 0$ → Je réduis au même dénominateur.

$\Leftrightarrow \dfrac{x+1+x-2}{(x-2)(x+1)} \leqslant 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x-1}{(x-2)(x+1)} \leqslant 0$

Correction non détaillée : $\mathscr{S} = \,]-\infty\,;-1\,[\,\cup\,[\,\dfrac{1}{2}\,;2\,[$

---

g. $\dfrac{1}{x+1} \geqslant \dfrac{1}{x-2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x-2} \geqslant 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x-2}{(x+1)(x-2)} - \dfrac{x+1}{(x+1)(x-2)} \geqslant 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x-2-x-1}{(x+1)(x-2)} \geqslant 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{-3}{(x+1)(x-2)} \geqslant 0$ $\longrightarrow$ On retrouve -3 comme trouble-fête... Voir ③ **i.** .

Correction non détaillée : $\mathscr{S} = \,]-1\,;2\,[$

---

h. $\dfrac{1}{x+2} + x > 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x+2} + \dfrac{x(x+2)}{x+2} > 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1+x^2+2x}{x+2} > 0$ $\longrightarrow$ J'ajoute les deux fractions et, en même temps, je distribue x (on peut passer par $\dfrac{... + x(x+2)}{x+2}$).

$\Leftrightarrow \dfrac{(x+1)^2}{x+2} > 0$ $\longrightarrow$ Je factorise avec une identité remarquable.

Correction non détaillée (attention à bien enlever -1) : $\mathscr{S} = \,]-2\,;-1\,[\, \cup \,]-1\,;+\infty\,[$