Savoir DÉTERMINER UNE ÉQUATION CARTÉSIENNE DE DROITES

Toute la fiche se passe dans un plan muni d'un repère (O, I, J) orthogonal.

Ce qu'il faut avoir compris

- **Une équation cartésienne d'une droite (d)**

  - C'est une égalité liant les lettres x et y qui est équivalente à l'appartenance d'un point $M(x\,;y)$ à la droite (d).

    Exemple : Prenons une droite (d) qui a une équation cartésienne $2x = 5y - 14$.
    - Si un point $A(a\,;b)$ **est sur** (d), alors on est sûr que $2a$ **est égal à** $5b - 14$.
    - Réciproquement, si $2a$ **est égal à** $5b - 14$, alors on est sûr que $A(a\,;b)$ **est sur** (d).

    On peut écrire l'équivalence : $M(x\,;y) \in (d) \Leftrightarrow 2x = 5y - 14$.

    Voir fiche **DTE 02**

    Remarquons qu'on peut donc utiliser la contraposée :
    - Si $2a$ **n'est pas égal à** $5b - 14$, alors on est sûr que $A(a\,;b)$ **n'est pas sur** (d).

    Et on note $(d) : 2x = 5y - 14$, où le symbole **:** est le groupe verbal « *a pour équation cartésienne* ».

    Remarque : Il existe aussi des équations cartésiennes de cercles, de paraboles, d'ellipses, ...

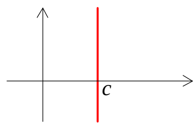
Ce qu'il faut savoir

- **Les formes d'équations cartésiennes de droites**

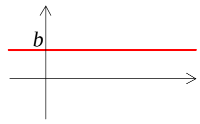
  - La **forme générale** des équations de droites est $\boxed{\alpha x + \beta y + \gamma = 0}$, où α, β et γ sont des nombres fixes.

  - Il y a les formes simplifiées, dites **équations réduites**.

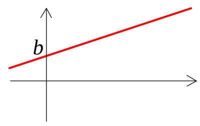
    - *1^ère^ forme réduite* : Si $\beta = 0$, la forme générale $\alpha x + \gamma = 0$ se ramène à la forme $\boxed{x = c}$.
      La droite est alors parallèle à l'axe des ordonnées ("verticale").
      c est la valeur où la droite coupe l'axe des abscisses.



    - *2^ème^ forme réduite* : Si $\alpha = 0$, la forme générale $\beta y + \gamma = 0$ se ramène à la forme $\boxed{y = b}$.
      La droite est alors parallèle à l'axe des abscisses ("horizontale").
      b est la valeur où la droite coupe l'axe des ordonnées.



    - *3^ème^ forme réduite* : Si $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$, la forme générale se ramène à la forme $\boxed{y = ax + b}$.
      La droite n'est alors parallèle à aucun axe.
      On reconnaît dans $ax + b$ l'expression d'une fonction affine avec
      $\begin{cases} a \text{ est le coefficient directeur de la droite} \\ b \text{ est l'ordonnée à l'origine (valeur où la droite coupe l'axe des ordonnées).} \end{cases}$



    Remarque : La 2^ème^ forme est un cas particulier de la 3^ème^ avec $a = 0$ et l'expression d'une fonction affine constante.

    Remarque : Si la droite passe par l'origine, la 3^ème^ forme devient $y = ax$, avec l'expression d'une fonction affine linéaire.

    Remarque : Ces trois formes provoqueront trois cas à envisager dans vos exercices.

- **La formule du coefficient directeur de la droite passant par $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$**

  Si $x_A \neq x_B$, le **coefficient directeur** de la droite (AB) est $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ (appelé aussi **taux de variation** entre x_A et x_B).

  Remarque : On voit $\begin{cases} \text{qu'il n'existe pas si } x_A = x_B \text{, quand la droite est parallèle à l'axe des ordonnées ("verticale")} \\ \text{qu'il vaut } 0 \text{ si } y_A = y_B \text{, quand la droite est parallèle à l'axe des abscisses ("horizontale").} \end{cases}$

Ce qu'il faut savoir faire

- **Déterminer l'équation réduite** (et donc le coefficient directeur) **de (d) à partir d'une équation de forme générale**

  Méthode : Je transforme l'équation par équivalences, en appliquant à gauche et à droite les mêmes opérations.

  - *1^er^ cas* où il n'y a pas de y dans l'équation (c'est que $\beta = 0$) : il faut isoler x pour obtenir la forme réduite $x = \dots$.
    Et alors, il n'y a pas de coefficient directeur.

  - *2^ème^ cas* où il n'y a pas de x dans l'équation (c'est que $\alpha = 0$) : il faut isoler y pour obtenir la forme réduite $y = \dots$.
    Et alors, le coefficient directeur vaut 0.

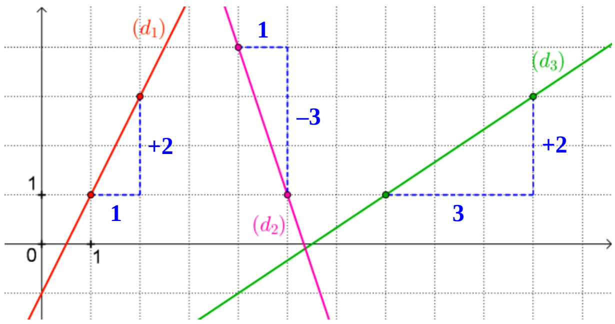
  - *3^ème^ cas sinon* : il faut isoler y pour obtenir la forme réduite $y = \dots x + \dots$.
    Et alors, le coefficient directeur est le coefficient de x.

- **Déterminer l'équation réduite** (et donc le coefficient directeur) **de (d) par simple** **lecture graphique**

  - *1er cas où la droite est "verticale"* : J'écris directement $(d) : x = ...$ avec l'abscisse où la droite coupe l'axe.
    Et alors, il n'y a pas de coefficient directeur.

  - *2ème cas où la droite est "horizontale"* : J'écris directement $(d) : y = ...$ avec l'ordonnée où la droite coupe l'axe.
    Et alors, le coefficient directeur est 0 .

  - *3ème cas où la droite est ni "verticale" ni "horizontale"* : L'équation sera de la forme $y = ax + b$.
    Méthode : 1) Je trouve graphiquement la valeur de b qui est l'ordonnée où la droite coupe l'axe.
    2) Je trouve graphiquement le coefficient directeur a avec la méthode de l'escalier (voir ci-dessous).
    3) Puis, j'écris directement $(d) : y = ... x + ...$.



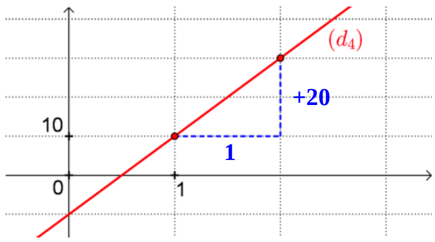
On relie deux points en avançant vers la droite de 1,
puis on compte de combien d'unités on monte ou on descend.

- Le coefficient directeur de (d_1) est 2 .

- Le coefficient directeur de (d_2) est -3 (négatif car on descend).

- Le coefficient directeur de (d_3) n'est pas 2 !
  Pour utiliser les carreaux, on a triché en avançant de 3 .
  Il faut donc "détricher" en divisant 2 par 3 .
  Le coefficient directeur de (d_3) est $\frac{2}{3}$.

Attention aux unités sur les axes !



Le coefficient directeur de (d_4) n'est pas 2 !
On est monté de 2 carreaux, mais un carreau vaut 10 unités.
Donc, le coefficient directeur est 20 .

- **Déterminer une équation cartésienne de (d) connaissant** **deux points** $A\,(\,x_A\,;\,y_A\,)$ **et** $B\,(\,x_B\,;\,y_B\,)$

  - *1er cas où* $x_A = x_B$: alors (d) est parallèle à l'axe des ordonnées ("verticale") et on a directement $(d) : x = x_A$.
    Et alors, il n'y a pas de coefficient directeur.

  - *2ème cas où* $y_A = y_B$: alors (d) est parallèle à l'axe des abscisses ("horizontale") et on a directement $(d) : y = y_A$.
    Et alors, le coefficient directeur est 0 .

  - *3ème cas sinon* : alors (d) coupe l'axe des ordonnées sans être "horizontale".

    Méthode 1 : 1) J'annonce que (d) a une équation de la forme $y = ax + b$.
    2) Je calcule le coefficient directeur a avec la formule du taux de variation.
    3) Je calcule b en remplaçant x et y par x_A et y_A (ou x_B et y_B) dans l'équation $y = ax + b$.
    4) Je n'oublie pas de conclure $(d) : y = ... x + ...$.

    Méthode 2 : C'est une méthode experte mais très rapide, qui sera réutilisée plus tard pour les équations cartésiennes d'autres objets géométriques.
    Elle permet de trouver l'équation par équivalences successives :

    1) Je pose un point $M\,(\,x\,;\,y\,)$.

    2) Je calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ et j'exprime les coordonnées de $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}$.

    3) Je raisonne par équivalences successives :

    $$\begin{aligned} M\,(\,x\,;\,y\,) \in (d) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont colinéaires} \\ &\Leftrightarrow \text{les coordonnées } \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \text{ sont proportionnelles} \\ &\Leftrightarrow (\,x - x_A\,) \times (\,y_B - y_A\,) - (\,y - y_A\,) \times (\,x_B - x_A\,) = 0 \end{aligned}$$

    (vous reconnaissez le **déterminant**, différence des deux produits en croix)

    Le développement me donne directement une équation cartésienne (non réduite).

    4) Je n'oublie pas de conclure $(d) : ...$.
    Si c'est demandé, vous devez éventuellement la transformer en équation réduite.

- **Déterminer une équation cartésienne de (d) connaissant la <u>direction</u> et un <u>point</u> $A\ (x_A\ ;\ y_A)$**

  La direction peut être donnée de trois manières différentes :

  - <u>*1er cas* où on me donne le coefficient directeur</u> : je me retrouve dans le <u>3ème *cas*</u> vu précédemment, après l'étape 2) de la **méthode 1**. Je n'ai plus qu'à calculer b par équation en utilisant x_A et y_A.
  - <u>*2ème cas* où on me donne une droite parallèle (Δ)</u> :
    - <u>*1er sous-cas* où (Δ) est parallèle à l'axe des ordonnées ("verticale")</u> : alors (d) aussi et on a $(d) : x = x_A$.
    - <u>*2ème sous-cas* où (Δ) est parallèle à l'axe des abscisses ("horizontale")</u> : alors (d) aussi et on a $(d) : y = y_A$.
    - <u>*3ème sous-cas* sinon</u> :

      Méthode : 1) J'annonce que (d) a une équation de la forme $y = ax + b$.

      2) Je précise que (d) et (Δ) sont <u>parallèles</u>, et qu'elles ont donc le <u>même coefficient directeur</u>. Je calcule donc le coefficient directeur de (Δ) (avec les méthodes précédentes), c'est a.

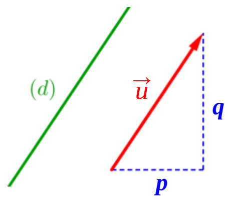
      3) Je n'ai plus qu'à calculer b (voir <u>3ème *cas*</u> vu précédemment).

  - <u>*3ème cas* où on me donne un vecteur directeur</u> $\vec{u}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$:
    - <u>*1er sous-cas* où $p = 0$</u> : (d) est parallèle à l'axe des ordonnées ("verticale") et on a $(d) : x = x_A$.
    - <u>*2ème sous-cas* où $q = 0$</u> : (d) est parallèle à l'axe des abscisses ("horizontale") et on a $(d) : y = y_A$.
    - <u>*3ème sous-cas* sinon</u> :

      Méthode 1 : 1) J'annonce que (d) a une équation de la forme $y = ax + b$.

      2) Je calcule le coefficient directeur a avec $a = \dfrac{q}{p}$.

      Je me retrouve dans le <u>3ème *cas*</u> vu précédemment, après l'étape 2) où je n'ai plus qu'à calculer b.

      On avance de p.
      Il faut donc "détricher"
      en divisant q par p.

      <u>*Remarque*</u> : Si p est positif, on retrouve $\dfrac{q}{p}$ avec la méthode de l'escalier.

      Si p est négatif, on utilise $-\vec{u}\begin{pmatrix} -p \\ -q \end{pmatrix}$ qui donne $\dfrac{-q}{-p} = \dfrac{q}{p}$.

      Méthode 2 : C'est la méthode experte vue précédemment <u>par équivalences successives</u> :

      1) Je pose un point $M\ (x\ ;\ y)$.

      2) $M\ (x\ ;\ y) \in (d) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires

      $\Leftrightarrow$ les coordonnées $\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ sont proportionnelles

      $\Leftrightarrow (x - x_A) \times q \ - \ (y - y_A) \times p \ = \ 0$

      Le développement me donne directement une équation cartésienne (non réduite).

      3) Je n'oublie pas de conclure (d) **:** ... .

      Si c'est demandé, vous devez éventuellement la transformer en équation réduite.

<u>*Remarques sur les exercices*</u>

- Les exercices ① à ④ demandent des équations cartésiennes dans les quatre situations vues ci-dessus.
- Les exercices suivants sont des approfondissements sur quelques objets vus au collège...

---

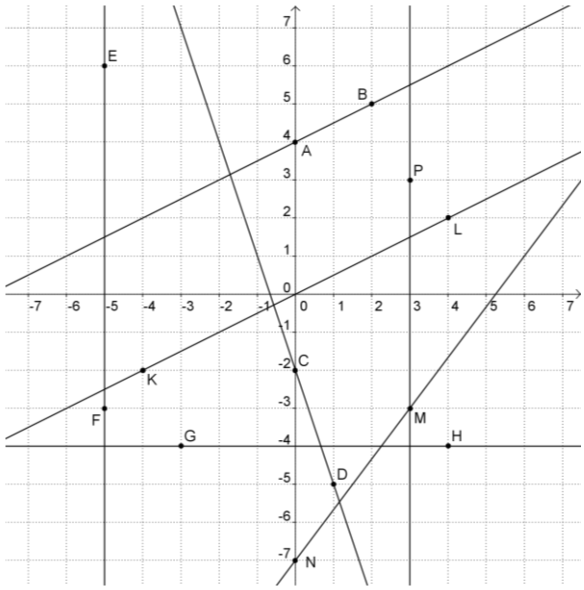
① On donne les droites suivantes :

$(d_1) :\ 10x - 2y + 23 = 0$, $\quad (d_2) :\ x = -y + 15$, $\quad (d_3) :\ x + 14 = \dfrac{y}{3}$, $\quad (d_4) :\ 19 - 3x = 4$, $\quad (d_5) :\ 6y - x + 14 = 0$.

Déterminer l'équation réduite de chacune de ces droites.

---

② Par simple lecture graphique, déterminer une équation cartésienne de chacune des droites (AB) , (CD) , (EF) , (GH) , (PM) , (KL) et (NM) .



---

③ Soit les points :

$A\,(8\,;3)$, $B\,(3\,;2)$, $C\,(-3\,;7)$, $D\,(-3\,;-1)$, $E\,(35\,;22)$, $F\,(7\,;64)$, $G\,(12\,;-5)$, $H\,(11\,;-5)$, $K\,(186\,;104)$ et $L\,(-123\,;-102)$.

Déterminer une équation cartésienne de chacune des droites (AB) , (CD) , (EF) , (GH) et (KL) .

---

④ Les exercices **1.** à **5.** sont indépendants.

1. Soit (d) la droite de coefficient directeur -2 qui passe par le point $M\,(125\,;52)$.
Déterminer une équation cartésienne de (d) .

2. On donne le point $R\,(12\,;-5)$ et les droites $(\Delta_1) : y = -3x + 1{,}7$ et $(\Delta_2) : 12x - 3y + 1 = 0$.

- **a.** Déterminer une équation cartésienne de la droite (d_1) qui passe par R et qui est parallèle à (Δ_1) .
- **b.** Déterminer une équation cartésienne de la droite (d_2) qui passe par R et qui est parallèle à (Δ_2) .

3. On donne le point $E\,(-3\,;7)$.

- **a.** Déterminer une équation cartésienne de la droite (δ_1) passant par E et parallèle à l'axe des abscisses.
- **b.** Déterminer une équation cartésienne de la droite (δ_2) passant par E et parallèle à l'axe des ordonnées.
- **c.** Déterminer une équation cartésienne de la droite (δ_3) passant par E et par l'origine.

4. Soit les points $M\,(10\,;1)$, $N\,(-13\,;7)$ et $T\,(68\,;211)$.

- **a.** Déterminer une équation cartésienne de (D_1) , la parallèle à (MN) passant par T .
- **b.** Déterminer une équation cartésienne de (D_2) , la parallèle à (MT) passant par N .
- **c.** Déterminer une équation cartésienne de (D_3) , la parallèle à (NT) passant par M .

5. Soit les points $A\,(-3\,;-8)$, $B\,(0\,;6)$ et $C\left(\frac{1}{3}\,;\frac{2}{3}\right)$, et les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\10\end{pmatrix}$.

- **a.** Déterminer une équation cartésienne de (d) la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.
- **b.** Déterminer une équation cartésienne de (d') la droite passant par B et de vecteur directeur $\vec{v}$.
- **c.** Déterminer une équation cartésienne de (d'') la droite passant par C et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$.

---

⑤ Soit les points $A\,(-5\,;-2)$, $B\,(3\,;4)$ et $C\,(-2\,;6)$.

Déterminer une équation cartésienne de la médiane de ABC issue de C .

⑥ Dans un plan muni d'un repère (O , I , J) orthonormé, soit les points $R (3 ; 2)$, $S (10 ; 2)$ et $T (5 ; 7)$.

a. Déterminer une équation cartésienne de (RS).

b. Déterminer une équation cartésienne de la droite (h), hauteur de RST issue de T.

c. Déterminer une équation cartésienne de la droite (m), médiatrice de RST associée au côté $[RS]$.

---

⑦ Dans un plan muni d'un repère (O , I , J) orthonormé, la bissectrice (β) de l'angle $\widehat{IOJ}$ est appelée **première bissectrice du repère**.

Déterminer une équation cartésienne de (β).

---

⑧ Soit le cercle (C) de centre $\Omega (3 ; -2)$ et de rayon 5.

a. Étant donné un point $M (x ; y)$ quelconque, écrire la longueur ΩM en fonction de x et y.
Écrire alors ΩM^2 en fonction de x et y.

b. Compléter l'équivalence : $M (x ; y) \in (C) \Leftrightarrow \Omega M^2 = \ldots$
En déduire une équation cartésienne du cercle (C).