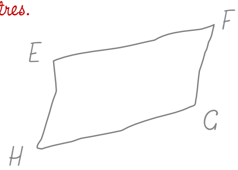
Correction de 2^{de} - VECTEURS - Fiche 2

Navigation vers les corrections : 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

1 **1.** Petit schéma prudent, en faisant attention à l'ordre des lettres.

a. $EFGH$ parallélogramme

donc $\begin{cases} \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG} \\ \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{GH} \\ \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG} \\ \overrightarrow{HE} = \overrightarrow{GF} \end{cases}$

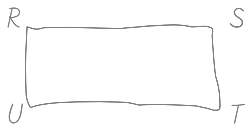


b. J milieu de $[RS]$.

donc $\begin{cases} \overrightarrow{RJ} = \overrightarrow{JS} \\ \overrightarrow{JR} = \overrightarrow{SJ} \end{cases}$

c. $RSTU$ rectangle

donc $\begin{cases} \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{UT} \\ \overrightarrow{SR} = \overrightarrow{TU} \\ \overrightarrow{RU} = \overrightarrow{ST} \\ \overrightarrow{UR} = \overrightarrow{TS} \end{cases}$



d. $\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{LM}$

donc $\begin{cases} \overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{ML} \\ \overrightarrow{JL} = \overrightarrow{KM} \\ \overrightarrow{LJ} = \overrightarrow{MK} \end{cases}$

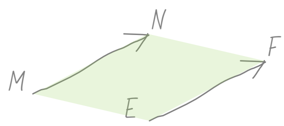
e. A symétrique de B par rapport à C

donc C milieu de $[AB]$.

donc $\begin{cases} \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} \\ \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BC} \end{cases}$

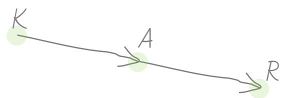
2. **a.** $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{EF}$

donc $EFNM$ parallélogramme



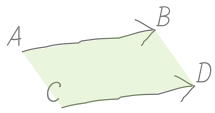
b. $\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{AR}$

donc A milieu de $[KR]$



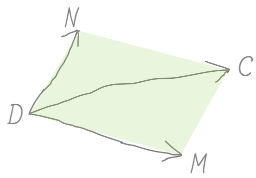
c. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

donc $ABDC$ parallélogramme



d. $\overrightarrow{DM} + \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DC}$

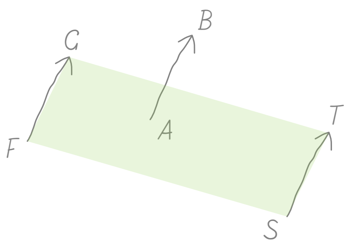
donc $DMCN$ parallélogramme



e. $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{ST} = \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{ST}$

donc $EFNM$ parallélogramme



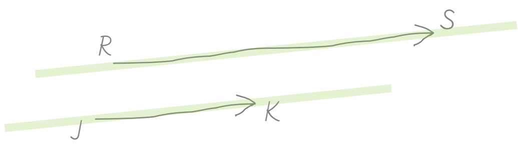
f. $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{GH}$

donc $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{HG}$

donc $AMGH$ parallélogramme

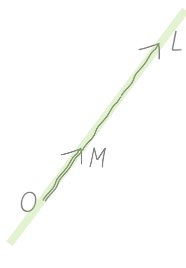
g. $\overrightarrow{RS} = 2\ \overrightarrow{JK}$

donc $(RS) // (JK)$



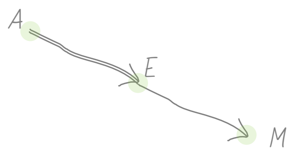
h. $\overrightarrow{OL} = 3\ \overrightarrow{OM}$

donc O , M et L alignés

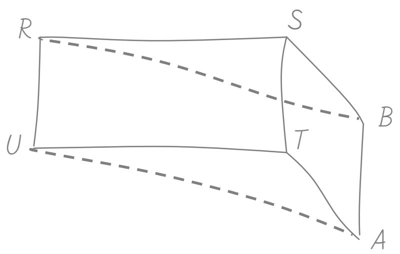


i. $\overrightarrow{AM} = 2\ \overrightarrow{AE}$

donc E milieu de $[AM]$



②



Je fais une figure au brouillon.

- *Ce qu'il faut démontrer est ce qu'on écrira à la fin et ça viendra certainement d'une égalité de la forme* $\overrightarrow{..} = \overrightarrow{..}$.

> donc $\overrightarrow{..} = \overrightarrow{..}$ ❷
> donc $RBAU$ parallélogramme. ❶

- *Il n'y a que deux données par lesquelles commencer :*
  qu'on transforme tout de suite en :
  et qui me donneront deux égalités de la forme $\overrightarrow{..} = \overrightarrow{..}$.

> $RSTU$ rectangle et $STAB$ losange ❸
> donc $RSTU$ et $STAB$ parallélogrammes ❸
> donc $\overrightarrow{..} = \overrightarrow{..}$ et $\overrightarrow{..} = \overrightarrow{..}$ ❹

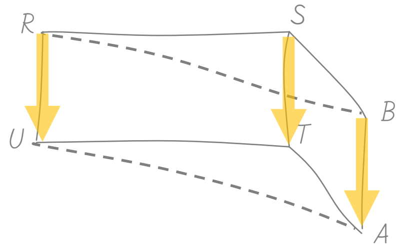
- *La démonstration ressemblera donc à :*

> $RSTU$ rectangle et $STAB$ losange ❸
> donc $RSTU$ et $STAB$ parallélogrammes ❸
> donc $\overrightarrow{..} = \overrightarrow{..}$ et $\overrightarrow{..} = \overrightarrow{..}$ ❹

❺

> donc $\overrightarrow{..} = \overrightarrow{..}$ ❷
> donc $RBAU$ parallélogramme. ❶

- *Pour faire la jonction ❺, il faut utiliser des vecteurs qui pourront "jouer" ensemble...*
  Ce seront les trois vecteurs "verticaux" $\overrightarrow{RU}$, $\overrightarrow{ST}$ *et* $\overrightarrow{BA}$ *qui semblent bien égaux !*
  On pourrait aussi utiliser $\overrightarrow{UR}$, $\overrightarrow{TS}$ *et* $\overrightarrow{AB}$.



- *Voici une version finale :*

> $RSTU$ rectangle et $STAB$ losange
> donc $RSTU$ et $STAB$ parallélogrammes
> donc $\overrightarrow{RU} = \overrightarrow{ST}$ et $\overrightarrow{ST} = \overrightarrow{BA}$
> donc $\overrightarrow{RU} = \overrightarrow{BA}$
> donc $RBAU$ parallélogramme.

- *Je vous montre ici une version intéressante mais moins naturelle.*
  Elle utilise les vecteurs justement "non verticaux" avec une méthode calculatoire :

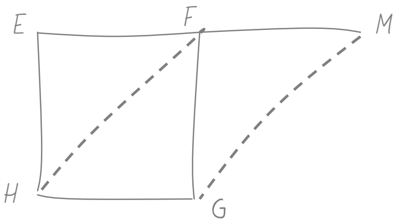
  $RSTU$ rectangle et $STAB$ losange
  donc $RSTU$ et $STAB$ parallélogrammes
  donc $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{UT}$ et $\overrightarrow{SB} = \overrightarrow{TA}$

  Arrivé là, on laisse nos deux égalités au frais...

  $\overrightarrow{RB} = \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SB}$ d'après la relation de Chasles
  $= \overrightarrow{UT} + \overrightarrow{TA}$ car $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{UT}$ et $\overrightarrow{SB} = \overrightarrow{TA}$
  $= \overrightarrow{UA}$ d'après la relation de Chasles
  donc $RBAU$ parallélogramme.

> *Nous utilisons deux fois la relation de Chasles dans deux sens différents.*

③



- La démonstration se terminera par :

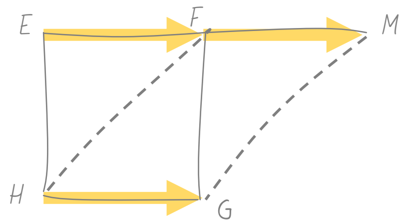
  donc $\overrightarrow{..} = \overrightarrow{..}$ ②
  donc $FMGH$ parallélogramme. ①

- Contrairement à l'exercice précédent, les deux données semblent de natures différentes.
  Traitons-les séparément :

  $EFGH$ carré ③
  donc $EFGH$ parallélogramme ③
  donc $\overrightarrow{..} = \overrightarrow{..}$ ④

  M symétrique de E par rapport à F ③
  donc F milieu de $[EM]$ ③
  donc $\overrightarrow{..} = \overrightarrow{..}$ ④

- Pour faire la jonction ⑤ de ④ jusqu'à ②,
  je vois un vecteur qui apparaît à la fois dans le carré et avec le milieu :
  il s'agit de $\overrightarrow{EF}$
  qui est égal à la fois à $\overrightarrow{HG}$ et à $\overrightarrow{FM}$.
  On pourrait aussi utiliser $\overrightarrow{FE}$.

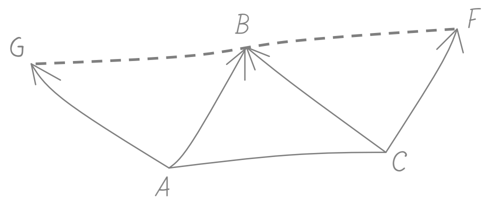


- Voici une version finale qui propose de présenter séparément les deux données :

  Avez-vous noté les articulations
  D'une part,
  D'autre part
  et On en déduit ?

  D'une part, $EFGH$ carré
  donc $EFGH$ parallélogramme
  donc $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$
  D'autre part, M symétrique de E par rapport à F
  donc F milieu de $[EM]$
  donc $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{FM}$
  On en déduit $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{FM}$
  donc $FMGH$ parallélogramme.

④



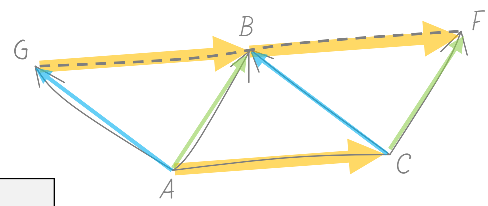
- La démonstration se terminera par :

  donc $\overrightarrow{..} = \overrightarrow{..}$ ②
  donc B milieu de $[FG]$. ①

  et commencera par :

  F translaté de C suivant $\overrightarrow{AB}$ et G translaté de A suivant $\overrightarrow{CB}$ ③
  donc $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{CB}$ ④

  On voit tout de suite sur la figure que les vecteurs $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{CB}$ ne sont pas dans la bonne position.
  C'est là qu'il faut se souvenir qu'on peut basculer d'une égalité à une autre directement :
  Et on aura tout ce qu'il nous faut !

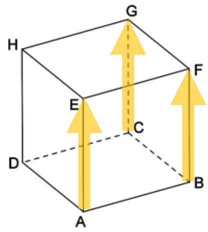


- Version finale :

  F translaté de C suivant $\overrightarrow{AB}$ et G translaté de A suivant $\overrightarrow{CB}$
  donc $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{CB}$
  donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{GB}$
  donc $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{GB}$
  donc B milieu de $[FG]$.

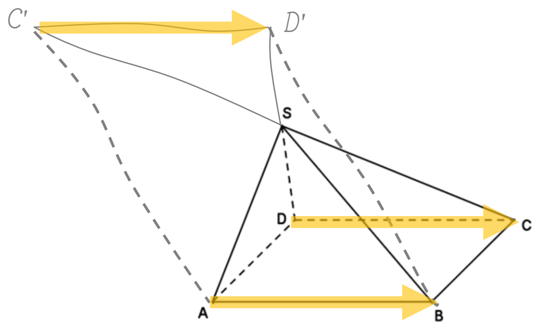
⑤

$ABCDEFGH$ cube
donc $ABFE$ et $BCGF$ carrés
donc $ABFE$ et $BCGF$ parallélogrammes
donc $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CG}$
donc $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CG}$
donc $ACGE$ parallélogramme.
On en déduit que $(AC) // (EG)$.



⑥

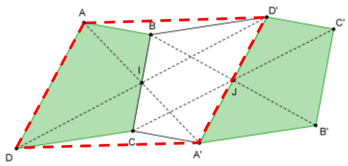
D'une part, C' et D' symétriques respectifs de C et D par rapport à S
donc S milieu de $[CC']$ et $[DD']$
donc $CDC'D'$ parallélogramme
donc $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{D'C'}$.
D'autre part, $ABCD$ carré
donc $ABCD$ parallélogramme
donc $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$.
On en déduit $\overrightarrow{D'C'} = \overrightarrow{BA}$
donc $ABD'C'$ parallélogramme.



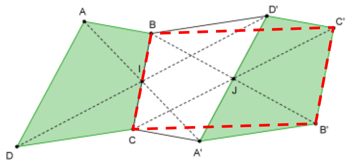
Ne vous laissez pas impressionner par la vision dans l'espace !

⑦

1. A' et D' symétriques respectifs de A et D par rapport à I
donc I milieu de $[AA']$ et de $[DD']$
donc $ADA'D'$ parallélogramme
donc $\overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{DA'}$.

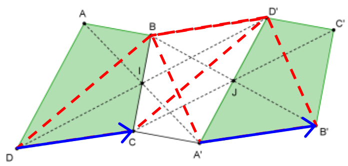


2. B' et C' symétriques respectifs de B et C par rapport à J
donc J milieu de $[BB']$ et de $[CC']$
donc $BCB'C'$ parallélogramme
donc $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{CB'}$.



3. D'une part, I milieu du côté $[BC]$ et de $[DD']$
donc $BDCD'$ parallélogramme
donc $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BD'}$.

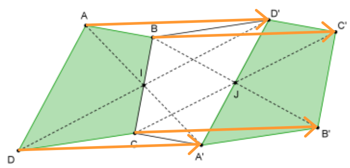
D'autre part, J milieu du côté $[A'D']$ et de $[BB']$
donc $A'B'D'B$ parallélogramme
donc $\overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{A'B'}$.



On en déduit $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{A'B'}$
donc $\overrightarrow{CB'} = \overrightarrow{DA'}$.

4. $\begin{cases} \text{D'après le } \mathbf{1.},\ \overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{DA'}, \\ \text{d'après le } \mathbf{2.},\ \overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{CB'}, \\ \text{d'après le } \mathbf{3.},\ \overrightarrow{CB'} = \overrightarrow{DA'} \end{cases}$

donc $\overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{DA'} = \overrightarrow{CB'} = \overrightarrow{BC'}$
donc le quadrilatère $D'C'B'A'$ est le translaté de $ABCD$ suivant le vecteur $\overrightarrow{AD'}$.

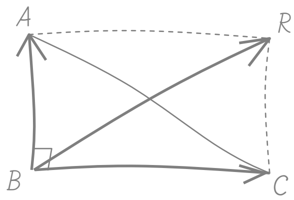


⑧

Vous devez voir tout de suite la somme de deux vecteurs de même origine :

$RSTU$ parallélogramme
donc $\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{RU} = \overrightarrow{RT}$
donc $\overrightarrow{TM} = \overrightarrow{RT}$
donc T milieu de $[RM]$.

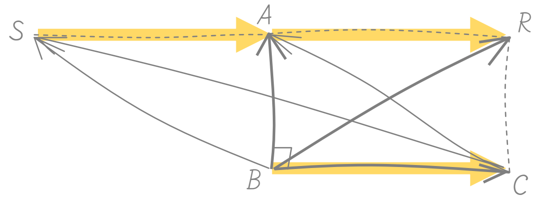
⑨ **1.** Encore une somme de deux vecteurs de même origine, mais c'est la réciproque :



$\overrightarrow{BR} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$
donc $ABCR$ parallélogramme.

De plus, ABC rectangle en B
donc $ABCR$ est un parallélogramme avec un angle droit
donc $ABCR$ est un rectangle.

2. D'une part, $\overrightarrow{CS} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$
donc $ACBS$ parallélogramme
donc $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AS}$

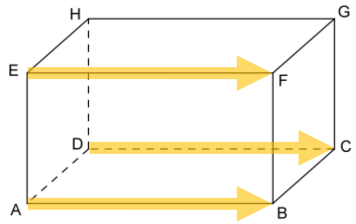


D'autre part, $ABCR$ parallélogramme
donc $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{RA}$

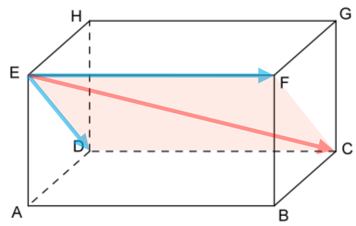
On en déduit $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{RA}$
donc A milieu de $[RS]$.

---

⑩ **1.** C'est exactement la même situation que dans l'exercice ④.



$ABCDEFGH$ pavé droit
donc $ABFE$ et $ABCD$ rectangles
donc $ABFE$ et $ABCD$ parallélogrammes
donc $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
donc $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DC}$.

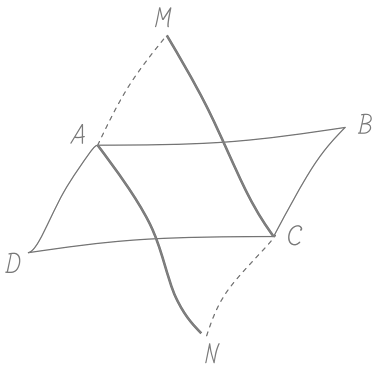


2. $\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC}$ d'après **1.**
$= \overrightarrow{EC}$ d'après la relation de Chasles.

On en déduit que $CDEF$ est un parallélogramme.

---

⑪ **1.**

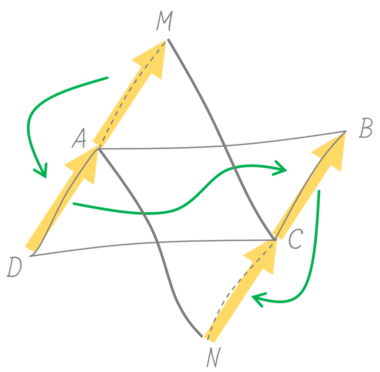


Voyez-vous des vecteurs égaux qui apparaissent :
- avec le milieu A ,
- avec le milieu C ,
- et avec le parallélogramme $ABCD$?

D'une part, M symétrique de D par rapport à A et N symétrique de B par rapport à C
donc A milieu de $[DM]$ et C milieu de $[NB]$
donc $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{CB}$.

D'autre part, $ABCD$ parallélogramme
donc $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$

On en déduit : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC}$
donc $AMCN$ parallélogramme.

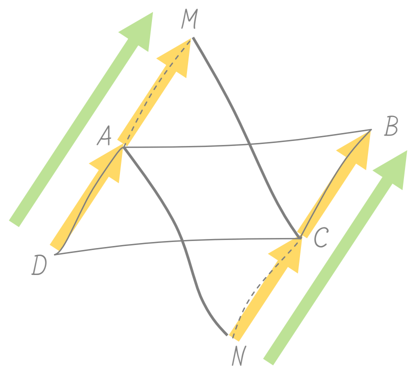


Ce sont quatre vecteurs égaux qui donnent l'égalité finale !

$\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{CB}$.

$\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$

2. On repère tout de suite les deux vecteurs verts égaux qui vont donner le parallélogramme.



- Première version : où on voit facilement qu'ils sont sommes des vecteurs jaunes.

$\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AM}$ ← Relation de Chasles dans un sens.

$= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{NC}$ d'après la question **1.**

$= \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CB}$ ← Je change l'ordre des vecteurs pour...

$= \overrightarrow{NB}$ ← ... voir la relation de Chasles dans l'autre sens.

donc $DMBN$ parallélogramme.

- Deuxième version : où on voit facilement qu'ils sont le double des vecteurs jaunes.

$\overrightarrow{DM} = 2\ \overrightarrow{DA}$ car A milieu de $[DM]$

$= 2\ \overrightarrow{CB}$ d'après la question **1.**

$= \overrightarrow{NB}$ car C milieu de $[NB]$

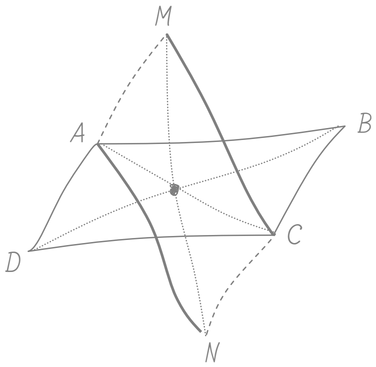
donc $DMBN$ parallélogramme.

- Troisième version : à l'ancienne, pour la nostalgie.

D'une part, $ABCD$ parallélogramme
donc $[DB]$ et $[AC]$ ont même milieu.

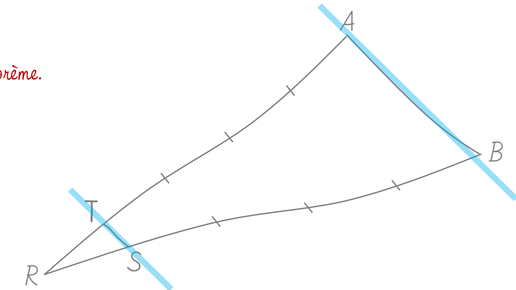
D'autre part, $AMCN$ parallélogramme
donc $[AC]$ et $[MN]$ ont même milieu.

On en déduit que $[DB]$ et $[MN]$ ont le même milieu
donc $DMBN$ est un parallélogramme.



---

(12) La figure montre clairement que le théorème de Thalès n'est pas loin.
Mais les données sont vectorielles et ne sont pas celles qu'il faut pour utiliser le théorème.
Restons donc dans le monde des vecteurs...



- Commençons par étudier la fin de la démonstration.

Le parallélisme
viendra certainement de deux vecteurs colinéaires
et deux vecteurs sont colinéaires si l'un est produit de l'autre par un nombre :

donc $\overrightarrow{..} = ...\ \overrightarrow{..}$ 2
donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{TS}$ colinéaires 2
donc $(AB) // (ST)$. 1

Pour les vecteurs, on aurait aussi pu prendre $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{ST}$.

Le nombre en question peut même être deviné !
Notre connaissance du théorème de Thalès nous dit que AB sera 5 fois plus long que ST .
Il faudra donc arriver à $\overrightarrow{AB} = 5\ \overrightarrow{TS}$ (attention aux sens...).

- Pour commencer, il n'y a que deux données et elles sont déjà vectorielles :
Il n'y a donc aucune donnée géométrique.
Ce sera une démonstration calculatoire.

$\overrightarrow{RA} = 5\ \overrightarrow{RT}$ et $\overrightarrow{RB} = 5\ \overrightarrow{RS}$ 4

- Voici une version finale :

$\overrightarrow{RA} = 5\ \overrightarrow{RT}$ et $\overrightarrow{RB} = 5\ \overrightarrow{RS}$

donc $\overrightarrow{AR} = 5\ \overrightarrow{TR}$ et $\overrightarrow{RB} = 5\ \overrightarrow{RS}$ ← Je change le sens de $\overrightarrow{RA}$ et de $\overrightarrow{RT}$. Regardez pourquoi après...

donc $\overrightarrow{AR} + \overrightarrow{RB} = 5\ \overrightarrow{TR} + 5\ \overrightarrow{RS}$ 5 ← Car la relation de Chasles sur $\overrightarrow{AR} + \overrightarrow{RB}$ me donnera $\overrightarrow{AB}$.

donc $\overrightarrow{AB} = 5\ (\ \overrightarrow{TR} + \overrightarrow{RS}\ )$ ← Je factorise et je vois que la relation de Chasles va de nouveau bien m'arranger.

donc $\overrightarrow{AB} = 5\ \overrightarrow{TS}$

donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{TS}$ colinéaires

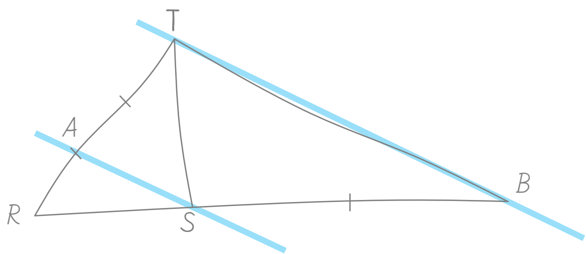
donc $(AB) // (ST)$.

- Voici une autre présentation où les données ne sont pas au début de la rédaction.
  On part du vecteur $\overrightarrow{AB}$ pour le transformer et espérer trouver $5\ \overrightarrow{TS}$ (en fait, on en est sûr !) :

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AR} + \overrightarrow{RB}$ ← Je modifie le parcours pour passer par R.
$= 5\ \overrightarrow{TR} + 5\ \overrightarrow{RS}$
$= 5(\ \overrightarrow{TR} + \overrightarrow{RS}\ )$
$= 5\ \overrightarrow{TS}$
donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{TS}$ colinéaires
donc $(AB) // (ST)$.

Vous remarquerez que c'est plus léger.

⑬ Exercice très semblable au précédent...

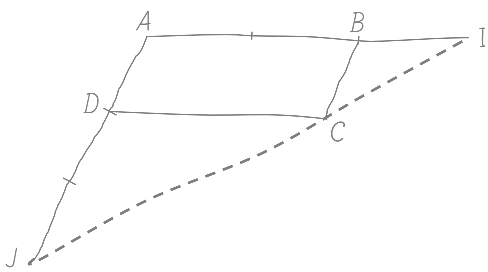


$\overrightarrow{RA} = \frac{1}{3}\ \overrightarrow{RT}$ et $\overrightarrow{RB} = 3\ \overrightarrow{RS}$
donc $\overrightarrow{RT} = 3\ \overrightarrow{RA}$ et $\overrightarrow{BR} = 5\ \overrightarrow{SR}$ ← J'exprime $\overrightarrow{RT}$ en fonction de $\overrightarrow{RA}$ et je change le sens de $\overrightarrow{RB}$ et de $\overrightarrow{RS}$.
donc $\overrightarrow{BR} + \overrightarrow{RT} = 3\ \overrightarrow{SR} + 3\ \overrightarrow{RA}$ ← Et la relation de Chasles sur $\overrightarrow{BR} + \overrightarrow{RT}$ me donnera $\overrightarrow{BT}$.
donc $\overrightarrow{BT} = 5(\ \overrightarrow{SR} + \overrightarrow{RA}\ )$ ← Je factorise et tout s'arrange.
donc $\overrightarrow{BT} = 3\ \overrightarrow{SA}$
donc $\overrightarrow{BT}$ et $\overrightarrow{SA}$ colinéaires
donc $(BT) // (SA)$.

- Autre présentation où on part du vecteur $\overrightarrow{BT}$:

$\overrightarrow{BT} = \overrightarrow{BR} + \overrightarrow{RT}$ ← Je modifie le parcours pour passer par R.
$= 3\ \overrightarrow{SR} + 3\ \overrightarrow{RA}$ car $\overrightarrow{RA} = \frac{1}{3}\ \overrightarrow{RT}$
$= 3(\ \overrightarrow{SR} + \overrightarrow{RA}\ )$
$= 3\ \overrightarrow{SA}$
donc $\overrightarrow{BT}$ et $\overrightarrow{SA}$ colinéaires
donc $(BT) // (SA)$.

⑭



- Commençons par étudier la fin de la démonstration.

L'alignement
viendra certainement de deux vecteurs colinéaires
et deux vecteurs sont colinéaires si l'un est produit de l'autre par un nombre :

donc $\overrightarrow{..} = ...\ \overrightarrow{..}$ ❷
donc $\overrightarrow{..}$ et $\overrightarrow{..}$ colinéaires ❷
donc I , C et J sont alignés. ❶

Pour les alignements, on a beaucoup de vecteurs colinéaires possibles.
Rien que vers le bas, nous avons $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{IJ}$, ou alors $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{CJ}$, ou alors $\overrightarrow{CJ}$ et $\overrightarrow{IJ}$. Et il y en a autant vers le haut !
Comme il y a des 3 dans les données, on peut tenter d'obtenir $\overrightarrow{IJ} = 3\ \overrightarrow{IC}$, ce qui se voit sur le schéma.

- Voici une version finale :

$\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AD}$

donc $\overrightarrow{IA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AD}$ ← J'exprime $\overrightarrow{IA}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}$.

donc $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AD}$ ← Bon, on va avoir $\overrightarrow{IJ}$ et on voit bien le 3 en facteur...

donc $\overrightarrow{IJ} = 3(\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD})$ ← Pas très sympathique, mais n'oubliez pas qu'il faut qu'apparaisse I.

donc $\overrightarrow{IJ} = 3(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{AD})$ ← Le voilà !

donc $\overrightarrow{IJ} = 3(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BC})$ car $ABCD$ parallélogramme

donc $\overrightarrow{IJ} = 3\overrightarrow{IC}$ ← Quod erat demonstrandum, comme disait Jules César.

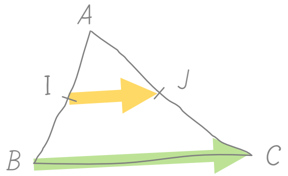
donc $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IC}$ colinéaires

donc I, C et J sont alignés.

Vous remarquerez que nous avons eu des problèmes de calcul et non des problèmes de raisonnement géométrique.

---

⑮



1. Cette question ressemble aux questions des exercices précédents et ne pose pas de difficulté.

I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$

donc $\overrightarrow{IA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

donc $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

donc $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$

donc $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

2.
- $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

  donc $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires
  donc $(IJ) // (BC)$.

- $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

  donc $\overrightarrow{IJ}$ et $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ ont la même longueur

  donc $IJ = \frac{1}{2}BC$.

---

⑯ L'exercice consiste juste à nettoyer l'écriture et à éliminer des lettres avec la relation de Chasles :

$2\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{EB} - 2\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CE}$

$= \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EB} + 2\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{CE}$ ← Je décompose le double et je transforme les soustractions.

$= \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{CE}$ ← Encore un double à décomposer.

$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CE}$ ← Je réorganise les termes pour avoir des lettres consécutives.

$= \overrightarrow{AE}$ ← Et j'applique la relation de Chasles.

---

⑰ C'est un exercice purement calculatoire sans aucune propriété géométrique à utiliser, inutile de faire une figure :

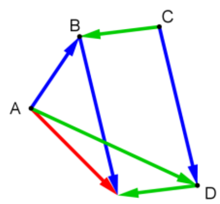
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) + (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD})$ ← J'utilise la relation de Chasles pour faire apparaître $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CB}$ dont j'ai besoin.

$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD})$ ← Les autres vecteurs créés vont nécessairement disparaître...

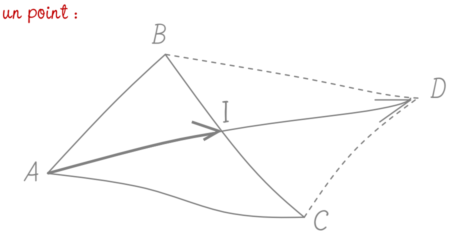
$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \vec{0}$

$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$

Une figure n'est pas utile mais on peut quand même regarder ce que ça fait :



⑱ • Version très géométrique, où la somme donne un parallélogramme et où il faut introduire un point :

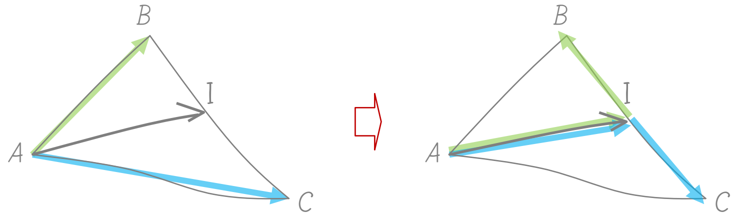


$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$
où D est le point tel que $ABDC$ est un parallélogramme.

I milieu de la diagonale $[BC]$
donc I milieu de l'autre diagonale $[AD]$
donc $\overrightarrow{AD} = 2\,\overrightarrow{AI}$
donc $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{AI}$.

• Version très élégante avec la relation de Chasles :

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}) + (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC})$ ← Relation de Chasles pour décomposer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ en deux parcours qui passent par I.



$= 2\,\overrightarrow{AI} + (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC})$ ← J'obtiens mon $2\,\overrightarrow{AI}$.
$= 2\,\overrightarrow{AI} + \vec{0}$ car I milieu de $[BC]$ ← Et le reste disparaît nécessairement !
$= 2\,\overrightarrow{AI}$

• Autre version avec la même méthode mais où on part de $2\,\overrightarrow{AI}$:

$2\,\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AI}$
$= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}) + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CI})$ ← Je décompose les deux $\overrightarrow{AI}$ pour faire apparaître $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
$= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CI})$ ← J'obtiens mon $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
$= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \vec{0}$ car I milieu de $[BC]$ ← Et le reste disparaît nécessairement !

---

⑲ Il a plein de manières d'y arriver…

• Version 1 où on cherche à réduire :

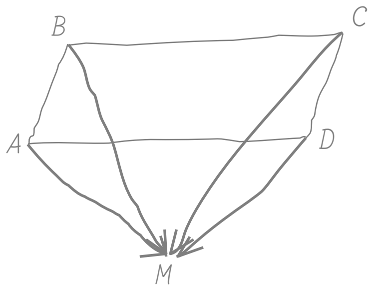
$\vec{u} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BC} + 2\,\overrightarrow{BA}$
$= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} + 2\,\overrightarrow{BA}$ car O milieu de la diagonale $[AC]$ du parallélogramme
$= \overrightarrow{AB} + \cancel{\overrightarrow{BA}} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$ ← La somme de deux vecteurs opposés donne le vecteur nul.
$= \overrightarrow{BD}$ car $ABCD$ parallélogramme

• Version 2 (très détaillée…) où on décompose autour de O :

$\vec{u} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} + 2\,(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA})$
$= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} + 2\,\overrightarrow{BO}$
$= \vec{0} + \vec{0} + 2\,\overrightarrow{BO}$ car O milieu de la diagonale $[AC]$ du parallélogramme
$= 2\,\overrightarrow{BO}$
$= \overrightarrow{BD}$ car O milieu de la diagonale $[BD]$ du parallélogramme

---

⑳ La figure n'apporte pas beaucoup d'indication…
C'est un exercice plutôt calculatoire, voyons ce qu'on a et ce qu'on veut.
Il nous faudrait 4 $\overrightarrow{AM}$ et le point M est déjà dans quatre vecteurs dont un $\overrightarrow{AM}$.
Faisons-le apparaître trois autres fois avec la relation de Chasles :



$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AM} + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}) + (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM}) + (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AM})$
$= 4\,\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CA} + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA})$

Nous avons gagné au passage un $\overrightarrow{CA}$.
Il reste à utiliser le parallélogramme pour traiter les deux autres vecteurs apparus:

$= 4\,\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CA} + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB})$ car $ABCD$ parallélogramme
$= 4\,\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}$ car $ABCD$ parallélogramme
$= 4\,\overrightarrow{AM} + 2\,\overrightarrow{CA}$

(21) Nous avons trois milieux qu'il faut associer à leurs segments.
Par exemple, I doit être associé à B et C.
Pour cela, on va utiliser la relation de Chasles et glisser B (ou C) entre A et I dans $\overrightarrow{AI}$.
Et faire pareil avec les deux autres vecteurs :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{CK} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AK} \\
&= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \quad \text{car } I\text{, } J \text{ et } K \text{ milieux respectifs de } [BC]\text{, } [AC] \text{ et } [AB] \\
&= \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{CA} \\
&= \frac{3}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) \\
&= \frac{3}{2}\overrightarrow{AA} \\
&= \overrightarrow{0}
\end{aligned}$$