Correction de 2^{de} - CALCUL ALGÉBRIQUE - Fiche 10

① **a.** Étape 1 : je cherche les deux abscisses d'annulations

$2x + 7 = 0 \iff x = -\dfrac{7}{2}$

$5 - 3x = 0 \iff x = \dfrac{5}{3}$

Étape 2 : je fais la ligne des $\boxed{x}$ en y plaçant les deux abscisses d'annulation (dans le bon ordre !)

x	$-\infty$		$-7/2$		$5/3$		$+\infty$

Étape 3 : j'ajoute la ligne des $\boxed{\text{signes de } 2x+7}$

x	$-\infty$		$-7/2$		$5/3$		$+\infty$
signes de $2x+7$		$-$	0	$+$		$+$	

coefficient directeur 2 positif donc $-$ puis $+$

ne pas oublier la séparation en $\frac{5}{3}$ qui servira par la suite

Étape 4 : j'ajoute la ligne des $\boxed{\text{signes de } 5-3x}$

x	$-\infty$		$-7/2$		$5/3$		$+\infty$
signes de $2x+7$		$-$	0	$+$		$+$	
signes de $5-3x$		$+$		$+$	0	$-$	

coefficient directeur -3 négatif donc $+$ puis $-$

Étape 5 : j'en déduis la ligne des $\boxed{\text{signes du produit}}$

x	$-\infty$		$-7/2$		$5/3$		$+\infty$
signes de $2x+7$		$-$	0	$+$		$+$	
signes de $5-3x$		$+$		$+$	0	$-$	
signes du produit		$-$	0	$+$	0	$-$	

$-$ par $+$ fait $-$

$+$ par $+$ fait $+$

$+$ par $-$ fait $-$

je n'oublie pas de reporter les 0

Étape 6 : je regarde quel signe est demandé dans l'inéquation $(2x+7)(5-3x) < 0$:

il faut que le produit soit **strictement négatif**

Étape 7 : je cherche les cases avec un $-$ dans la ligne $\boxed{\text{signes du produit}}$ et j'exclus les 0

x	$-\infty$		$-7/2$		$5/3$		$+\infty$
signes de $2x+7$		$-$	0	$+$		$+$	
signes de $5-3x$		$+$		$+$	0	$-$	
signes du produit		$-$	0	$+$	0	$-$	

Étape 8 : je remonte dans la ligne des $\boxed{x}$ en excluant les abscisses

x	$-\infty$		$-7/2$		$5/3$		$+\infty$
signes de $2x+7$		$-$	0	$+$		$+$	
signes de $5-3x$		$+$		$+$	0	$-$	
signes du produit		$-$	0	$+$	0	$-$	

Étape 9 : je traduis les zones bleues en un ensemble de solutions :

$\mathcal{S} = \left]-\infty\,;-\dfrac{7}{2}\right[\cup \left]\dfrac{5}{3}\,;+\infty\right[$ $\rightarrow$ Avec crochets ouverts.

b. $-7+x=0 \Leftrightarrow x=7$

$1+4x=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{4}$

x	$-\infty$		$-1/4$		7		$+\infty$
signes de $-7+x$		$-$		$-$	0	$+$	
signes de $1+4x$		$-$	0	$+$		$+$	
signes du produit		$+$	0	$-$	0	$+$	

→ Car le coefficient directeur est 1 positif.

→ Car le coefficient directeur est 4 positif.

$\mathscr{S} = \left]-\infty\,;-\dfrac{1}{4}\right] \cup [\,7\,;+\infty\,[$ → Les crochets en $-\dfrac{1}{4}$ et en 7 sont fermés car l'inéquation précise que le produit doit être $\geqslant 0$.

---

c. $-2x=0 \Leftrightarrow x=0$ → Ne vous trompez pas sur une équation aussi simple !

$1-2x=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

x	$-\infty$		0		$1/2$		$+\infty$
signes de $-2x$		$+$	0	$-$		$-$	
signes de $1-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
signes du produit		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\mathscr{S} = \left[\,0\,;\dfrac{1}{2}\right]$

---

d. $2-x=0 \Leftrightarrow x=2$

$10x+1=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{10}$

x	$-\infty$		$-1/10$		2		$+\infty$
signes de $2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
signes de $10x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
signes du produit		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\mathscr{S} = \left]-\dfrac{1}{10}\,;2\,\right[$

---

e. Attention à cette première expression inhabituelle.

$(6x-7)^2$ peut s'écrire $(6x-7)(6x-7)$ et on pourrait le gérer avec une 1^ère^ ligne de $\boxed{\text{signes de } 6x-7}$ puis une 2^ème^ ligne de $\boxed{\text{signes de } 6x-7}$.

Comme dans les exemples précédents.

Mais remarquons tout d'abord qu'il est inutile de résoudre deux fois la même équation $6x-7=0$: on n'a donc qu'une seule abscisse d'annulation.

$6x-7=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{7}{6}$

x	$-\infty$		$7/6$		$+\infty$
signes de $6x-7$		$-$	0	$+$	
signes du carré		$+$	0	$+$	

Et en plus, on n'a en fait pas besoin d'une 2^ème^ ligne de $\boxed{\text{signes de } 6x-7}$.

$-$ au carré fait $+$

$+$ au carré fait $+$

On remarque ici qu'un 0 n'est pas toujours entouré de deux signes différents...

$\mathscr{S} = \left]-\infty\,;\dfrac{7}{6}\right[\cup \left]\dfrac{7}{6}\,;+\infty\right[$ → Qu'on peut aussi écrire $\mathscr{S} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{7}{6}\right\}$.

---

f. Première inéquation à trois facteurs ! Aucune difficulté particulière...

$-2x-5=0 \Leftrightarrow x=-\frac{5}{2}$

$5+x=0 \Leftrightarrow x=-5$

$2-5x=0 \Leftrightarrow x=\frac{2}{5}$

x	$-\infty$		-5		$-5/2$		$2/5$		$+\infty$
signes de $-2x-5$		+		+	0	–		–	
signes de $5+x$		–	0	+		+		+	
signes de $2-5x$		+		+		+	0	–	
signes du produit		–	0	+	0	–	0	+	

$\mathscr{S}=[\,-5\,;-\frac{5}{2}\,]\cup[\,\frac{2}{5}\,;+\infty\,[$

---

g. $x=0$

$8-x=0 \Leftrightarrow x=8$

$4x-11=0 \Leftrightarrow x=\frac{11}{4}$

x	$-\infty$		0		$11/4$		8		$+\infty$
signes de x		–	0	+		+		+	
signes de $8-x$		+		+		+	0	–	
signes de $4x-11$		–		–	0	+		+	
signes du produit		+	0	–	0	+	0	–	

$\mathscr{S}=]\,0\,;\frac{11}{4}\,[\,\cup\,]\,8\,;+\infty\,[$

---

h. $6+x=0 \Leftrightarrow x=-6$

$12-4x=0 \Leftrightarrow x=3$ → Comme dans le **e.**, pas la peine de décomposer en $(12-4x)(12-4x)$.

x	$-\infty$		-6		3		$+\infty$
signes de $6+x$		–	0	+		+	
signes de $12-4x$		+		+	0	–	
signes de $(12-4x)^2$		+		+	0	+	
signes du produit		–	0	+	0	+	

→ Attention ! Cette ligne sert uniquement à remplir la ligne des $\boxed{\text{signes de } (12-4x)^2}$ ...
Il ne faut surtout pas la compter pour la ligne finale !

Je remplis la ligne des $\boxed{\text{signes du produit}}$
avec la ligne des $\boxed{\text{signes de } 6+x}$ et la ligne des $\boxed{\text{signes de } (12-4x)^2}$

$\mathscr{S}=[\,-6\,;+\infty\,[$

---

② **a.** Premier travail : **factoriser l'expression** pour bien avoir une inéquation de la forme « signe d'un **produit** » :

$49x^2-100\leqslant 0$ → Je vois une superbe identité remarquable a^2-b^2 avec $a=7x$ et $b=10$.

$\Leftrightarrow (7x+10)(7x-10)\leqslant 0$

$7x+10=0 \Leftrightarrow x=-\frac{10}{7}$

$7x-10=0 \Leftrightarrow x=\frac{10}{7}$

x	$-\infty$		$-10/7$		$10/7$		$+\infty$
signes de $7x+10$		–	0	+		+	
signes de $7x-10$		–		–	0	+	
signes du produit		+	0	–	0	+	

$\mathscr{S}=[\,-\frac{10}{7}\,;\frac{10}{7}\,]$

b. Premier travail : **annuler le membre de droite** pour bien avoir une inéquation de la forme « **signe** de ... ».
Second travail : **factoriser l'expression** pour bien avoir une inéquation de la forme « signe d'un **produit** » :

$16x^2 > 25$
$\Leftrightarrow 16x^2 - 25 > 0$ → J'annule le membre de droite.
$\Leftrightarrow (4x+5)(4x-5) > 0$ → Je factorise, encore avec une identité remarquable.

Correction non détaillée : $\mathscr{S} = \left]-\infty\,;-\frac{4}{5}\right[\cup \left]\frac{4}{5}\,;+\infty\right[$

---

c. Pas besoin d'annuler le membre de droite. Mais il faut factoriser.

$(x+3)^2 - 4 \geqslant 0$ → Je reconnais encore $a^2 - b^2$ avec $a = x+3$ et $b = 2$.
$\Leftrightarrow [(x+3)+2][(x+3)-2] \geqslant 0$
$\Leftrightarrow (x+5)(x+1) \geqslant 0$

Correction non détaillée : $\mathscr{S} = \left]-\infty\,;-5\right] \cup \left[-1\,;+\infty\right[$

---

d. $(2-5x)^2 < 1$
$\Leftrightarrow (2-5x)^2 - 1 < 0$ → Annulation du membre de droite et je reconnais $a^2 - b^2$ avec $a = 2-5x$ et $b = 1$.
$\Leftrightarrow [(2-5x)+1][(2-5x)-1] < 0$
$\Leftrightarrow (3-5x)(1-5x) < 0$

Correction non détaillée : $\mathscr{S} = \left]\frac{1}{5}\,;\frac{3}{5}\right[$

---

e. $(1-3x)(7+x) \leqslant (x+7)(5x-4)$
$\Leftrightarrow (1-3x)(7+x) - (x+7)(5x-4) \leqslant 0$ → Annulation du (gros) membre de droite.
$\Leftrightarrow (7+x)[(1-3x)-(5x-4)] \leqslant 0$ → Factorisation avec un facteur commun.
$\Leftrightarrow (7+x)(1-3x-5x+4) \leqslant 0$ → Attention aux erreurs de signes...
$\Leftrightarrow (7+x)(5-8x) \leqslant 0$

Correction non détaillée : $\mathscr{S} = \left]-\infty\,;-7\right] \cup \left[\frac{5}{8}\,;+\infty\right[$

---

f. $(7x-2)^2 \leqslant (4+x)^2$
$\Leftrightarrow (7x-2)^2 - (4+x)^2 \leqslant 0$
$\Leftrightarrow [(7x-2)+(4+x)][(7x-2)-(4+x)] \leqslant 0$
$\Leftrightarrow (7x-2+4+x)(7x-2-4-x) \leqslant 0$
$\Leftrightarrow (8x+2)(6x-6) \leqslant 0$

Correction non détaillée : $\mathscr{S} = \left[-\frac{1}{4}\,;1\right]$

---

g. $4x^2 < 3$
$\Leftrightarrow 4x^2 - 3 < 0$ → Je reconnais nécessairement $a^2 - b^2$ avec $a = x+3$ et un b fort peu sympathique...
$\Leftrightarrow (2x+\sqrt{3})(2x-\sqrt{3}) < 0$ → Penser que 3 est $(\sqrt{3})^2$.

Correction non détaillée : $\mathscr{S} = \left]-\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\frac{\sqrt{3}}{2}\right[$

---

h. $x^3 - 9x \geqslant 0$
$\Leftrightarrow x(x^2-9) \geqslant 0$ → Une première factorisation avec un facteur commun...
$\Leftrightarrow x(x+3)(x-3) \geqslant 0$ → ... puis une deuxième factorisation avec une identité remarquable.

Correction non détaillée (voir ① **g.**) : $\mathscr{S} = \left[-3\,;0\right] \cup \left[3\,;+\infty\right[$

---

i. $(2+x)^2 < x^2 - 4$
$\Leftrightarrow (2+x)^2 - (x^2-4) < 0$
$\Leftrightarrow (2+x)^2 - (x+2)(x-2) < 0$
$\Leftrightarrow (2+x)[(2+x)-(x-2)] < 0$
$\Leftrightarrow (2+x)(2+x-x+2) < 0$
$\Leftrightarrow (2+x)4 < 0$ → Tiens, il y a des x qui ont disparu ! Mais alors... c'est du simple 1er degré...
$\Leftrightarrow 8+4x > 0$
$\Leftrightarrow 4x > -8$
$\Leftrightarrow x > -\frac{8}{4}$
$\Leftrightarrow x > -2$

$\mathscr{S} = \left]-2\,;+\infty\right[$

③ **a.** $25x^2 + 10x + 1 > 0$

$\Leftrightarrow (5x+1)^2 > 0$ → C'est comme le ① **e.** .

$5x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{5}$

x	$-\infty$	$-1/5$	$+\infty$
signes de $5x+1$	$-$	0	$+$
signes du carré	$+$	0	$+$

$\mathcal{S} = \left]-\infty ; -\frac{1}{5}\right[\cup \left]-\frac{1}{5} ; +\infty\right[$ → On peut aussi écrire $\mathcal{S} = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{5}\}$.

---

b. Correction non détaillée, il suffit de réutiliser le même tableau : $\mathcal{S} = \mathbb{R}$ → L'expression $(5x+1)^2$ est positive ou nulle partout.

---

c. Correction non détaillée : $\mathcal{S} = \{-\frac{1}{5}\}$ → L'expression $(5x+1)^2$ n'est nulle qu'en $-\frac{1}{5}$ et strictement négative nulle part.

---

d. Correction non détaillée : $\mathcal{S} = \varnothing$ → L'expression $(5x+1)^2$ n'est strictement négative nulle part.

---

e. $36x^2 + 49 > 84x$

$\Leftrightarrow 36x^2 + 49 - 84x > 0$

$\Leftrightarrow 36x^2 - 84x + 49 > 0$

$\Leftrightarrow (6x-7)^2 > 0$

Correction non détaillée : $\mathcal{S} = \left]-\infty ; \frac{7}{6}\right[\cup \left]\frac{7}{6} ; +\infty\right[$ → On peut aussi écrire $\mathcal{S} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{7}{6}\}$.

---

f) $12x - 9x^2 \geqslant 4$

$\Leftrightarrow 12x - 9x^2 - 4 \geqslant 0$

$\Leftrightarrow -9x^2 + 12x - 4 \geqslant 0$ → Gros souci ! Les signes sont complètement à l'envers de ce qu'on voudrait…

$\Leftrightarrow 9x^2 - 12x + 4 \leqslant 0$ → Et bien, il suffit de tout multiplier par -1 … Attention au changement de sens…

$\Leftrightarrow (3x-2)^2 \leqslant 0$

Correction non détaillée : $\mathcal{S} = \{\frac{2}{3}\}$

> On pouvait aussi procéder autrement dès le départ :
>
> $12x - 9x^2 \leqslant 4$
>
> $\Leftrightarrow 0 \leqslant 4 - 12x + 9x^2$
>
> ce qui revient au même !

---

g. $(x^2+9)(x-1) \leqslant 6x(x-1)$

$\Leftrightarrow (x^2+9)(x-1) - 6x(x-1) \leqslant 0$

$\Leftrightarrow (x-1)[(x^2+9) - 6x] \leqslant 0$ → Une première factorisation avec un facteur commun…

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 6x + 9) \leqslant 0$ → … puis une deuxième factorisation avec une identité remarquable.

$\Leftrightarrow (x-1)(x-3)^2 \leqslant 0$

$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
Correction des lignes intermédiaires non détaillée (voir ① **h.**)				
signes du produit	$-$	0	$+$	0	$+$

$\mathcal{S} =]-\infty ; 1] \cup \{3\}$ → Attention à ne pas oublier 3 !

---

h. $x^2 + 3 + 2\sqrt{2}\,x \geqslant 1$

$\Leftrightarrow x^2 + 3 + 2\sqrt{2}\,x - 1 \geqslant 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 2\sqrt{2}\,x + 2 \geqslant 0$

$\Leftrightarrow (x + \sqrt{2})^2 > 0$

Correction non détaillée : $\mathcal{S} = \left]-\infty ; -\sqrt{2}\right[\cup \left]-\sqrt{2} ; +\infty\right[$ → On peut aussi écrire $\mathcal{S} = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}\}$.