Correction de 2^{de} - CALCUL ALGÉBRIQUE - Fiche 7

① **1.** Je pose n , $n+1$ et $n+2$ trois entiers consécutifs avec $n \in \mathbb{Z}$. → Je pose les deux expressions littérales qui vont m'être utiles.

Alors la somme s'écrit $n+n+1+n+2 = 3n+3$ → Je traduis la somme de ces deux expressions et je réduis.

$= 3(n+1)$ avec $n+1 \in \mathbb{Z}$. → Je factorise par 3 pour exprimer la divisibilité par 3...

... et je justifie que l'autre facteur est entier.

Donc, la somme est bien divisible par 3.

2. Je pose n , $n+1$, $n+2$ et $n+3$ quatre entiers consécutifs avec $n \in \mathbb{Z}$.

Alors la somme s'écrit $n+n+1+n+2+n+3 = 4n+6$

$= 2(2n+3)$ avec $2n+3 \in \mathbb{Z}$. → Je factorise par 2.

Donc, la somme est bien paire.

3. Je pose n et $n+1$ deux entiers consécutifs avec $n \in \mathbb{Z}$.

Alors la différence entre leurs carrés s'écrit $(n+1)^2 - n^2 = n^2+2n+1-n^2$ → Je développe avec une identité remarquable.

$= 2n+1$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

Donc, cette différence est bien impaire.

On pouvait aussi calculer l'autre différence, mais c'est plus technique :

$n^2-(n+1)^2 = n^2-(n^2+2n+1)$ → Je protège mon développement avec des parenthèses.

$= n^2-n^2-2n-1$

$= -2n-1$

$= -2n-2+1$ → Je fais apparaître $+1$.

$= 2(-n-1)+1$ avec $-n-1 \in \mathbb{Z}$.

Donc, cette différence est bien impaire.

② **1.** Je pose $2k$ et $2k+2$ deux entiers pairs consécutifs avec $k \in \mathbb{Z}$. → Je pose les deux expressions littérales qui vont m'être utiles.

Alors le produit s'écrit $2k(2k+2) = 4k^2+4k$ → Je traduis le produit de ces deux expressions et je développe.

$= 4(k^2+k)$ avec $k^2+k \in \mathbb{Z}$. → Je factorise par 4 pour exprimer la divisibilité par 4...

... et je justifie que l'autre facteur est entier.

Donc, le produit est bien divisible par 4.

2. Je pose $2k$, $2k+2$ et $2k+4$ trois entiers pairs consécutifs avec $k \in \mathbb{Z}$.

Alors la somme s'écrit $2k+2k+2+2k+4 = 6k+6$

$= 6(k+1)$ avec $k+1 \in \mathbb{Z}$.

Donc, la somme est bien divisible par 6.

③ **1.** Je pose $2k+1$ et $2k+3$ deux entiers impairs consécutifs avec $k \in \mathbb{Z}$.

Alors la somme s'écrit $2k+1+2k+3 = 4k+4$

$= 4(k+1)$ avec $k+1 \in \mathbb{Z}$.

Donc, la somme est bien divisible par 4.

2. Je pose $2k+1$, $2k+3$ et $2k+5$ trois entiers impairs consécutifs avec $k \in \mathbb{Z}$.

Alors la somme s'écrit $2k+1+2k+3+2k+5 = 6k+9$

$= 3(2k+3)$ avec $2k+3 \in \mathbb{Z}$.

Donc, la somme est bien divisible par 3.

3. Je pose $2k+1$, $2k+3$, $2k+5$ et $2k+7$ quatre entiers impairs consécutifs avec $k \in \mathbb{Z}$.

Alors la somme s'écrit $2k+1+2k+3+2k+5+2k+7 = 8k+16$

$= 8(k+2)$ avec $k+2 \in \mathbb{Z}$.

Donc, la somme est bien divisible par 8.

4. Je pose $2k+1$ et $2h+1$ deux entiers impairs avec $k \in \mathbb{Z}$ et $h \in \mathbb{Z}$.

Vous avez remarqué l'utilisation d'une deuxième lettre h car les deux impairs n'ont aucun lien entre eux.

Alors la somme s'écrit $2k+1+2h+1 = 2k+2h+2$

$= 2(k+h+1)$ avec $k+h+1 \in \mathbb{Z}$.

Donc, la somme est bien paire.

5. Je pose $2k+1$, $2h+1$ et $2m+1$ trois entiers impairs avec $k \in \mathbb{Z}$, $h \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{Z}$.

Alors la somme s'écrit $2k+1+2h+1+2m+1 = 2k+2h+2m+2+1$ → Notez l'astuce de ne pas calculer $1+1+1=3$.

$= 2(k+h+m+1)+1$ avec $k+h+m+1 \in \mathbb{Z}$.

Donc, la somme est bien impaire.

6. Je pose $2k+1$ et $2h+1$ deux entiers impairs avec $k \in \mathbb{Z}$ et $h \in \mathbb{Z}$.

Alors le produit s'écrit $(2k+1)(2h+1) = 4kh+2k+2h+1$

$= 2(2kh+k+h)+1$ avec $2kh+k+h \in \mathbb{Z}$.

Donc, le produit est bien impair.

7. Je pose $2k+1$ et $2k+3$ deux entiers impairs consécutifs avec $k \in \mathbb{Z}$.
Alors le produit s'écrit $(2k+1)(2k+3) = 4k^2+6k+2k+3$
$= 4k^2+8k+2+1$ → Il faut faire apparaître le $+1$.
$= 2(2k^2+4k+1)+1$ avec $2k^2+4k+1 \in \mathbb{Z}$.
Donc, le produit est bien impair.

8. Je pose $2k+1$ et $2k+3$ deux entiers impairs consécutifs avec $k \in \mathbb{Z}$.
Alors le produit s'écrit $(2k+1)(2k+3) = 4k^2+6k+2k+3$
$= 4k^2+8k+3$ → Là, je laisse le $+3$.
$= 4(k^2+2k)+3$ avec $k^2+2k \in \mathbb{Z}$.
Donc, le produit a bien pour reste 3 dans la division euclidienne par 4.

9. Je pose $2k+1$ un entier impair avec $k \in \mathbb{Z}$.
Alors son carré s'écrit $(2k+1)^2 = 4k^2+4k+1$
$= 4(k^2+k)+1$ avec $k^2+k \in \mathbb{Z}$.
Donc, le carré a bien pour reste 1 dans la division euclidienne par 4.

10. Je pose $2k+1$, $2k+3$ et $2k+5$ trois entiers impairs consécutifs avec $k \in \mathbb{Z}$.
Alors la somme s'écrit $2k+1+2k+3+2k+5 = 6k+9$
$= 6k+6+3$
$= 6(k+1)+3$ avec $k+1 \in \mathbb{Z}$.
Donc, la somme a bien pour reste 3 dans la division euclidienne par 6.

---

④ **1.** Je pose $\overline{aaa}_{(10)}$ un nombre écrit avec trois chiffres identiques, avec $a \in \{1;2;...;9\}$. → a ne peut pas valoir 0.
Alors le nombre s'écrit $100a+10a+a = 111a$
$= 37\times3a$ avec $3a \in \mathbb{Z}$. → Je décompose 111 et 37 apparaît.
Donc, le nombre est bien divisible par 37.

2. Je pose $\overline{abba}_{(10)}$ un nombre palindrome à quatre chiffres, avec a et b dans $\{0;1;2;...;9\}$ et $a \neq 0$.
Alors le nombre s'écrit $1\,000a+100b+10b+a = 1\,001a+110b$
$= 11\times91a+11\times10b$ → Je décompose $1\,001$ et 110 et 11 apparaît.
$= 11(91a+10b)$ avec $91a+10b \in \mathbb{Z}$.
Donc, le nombre est bien divisible par 11.

3. *a)* N s'écrit $100a+10b+c = 99a+a+9b+b+c$ → Je décompose $100a$ et $10b$ pour faire apparaître $a+b+c$.
$= 9(11a+b)+a+b+c$ avec $11a+b \in \mathbb{Z}$. → Je factorise par 9 en laissant de côté $a+b+c$.
Donc, N s'écrit bien sous la forme de la somme d'un multiple de 9 et de la somme des chiffres $a+b+c$.

b) Si la somme des chiffres est multiple de 9, alors elle s'écrit $a+b+c=9k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
Alors : $N = 9(11a+b)+9k$ → Je remplace $a+b+c$ par $9k$.
$= 9(11a+b+k)$ avec $11a+b+k \in \mathbb{Z}$. → Je factorise par 9.
Donc, N est bien multiple de 9.

c) Si la somme des chiffres est multiple de 3, alors elle s'écrit $a+b+c=3k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
Alors : $N = 9(11a+b)+3k$ → Je remplace $a+b+c$ par $3k$.
$= 3\times3(11a+b)+3k$ → Je décompose 9 pour faire apparaître 3.
$= 3[3(11a+b)+k]$ avec $3(11a+b)+k \in \mathbb{Z}$.
Donc, N est bien multiple de 3.

---

⑤ **1.** Je pose n, $n+1$ et $n+2$ trois entiers consécutifs avec $n \in \mathbb{Z}$.
Alors :
$n+n+1+n+2 = 1\,437$
Bien comprendre le statut de cette égalité : elle est donnée dans l'énoncé, c'est une **équation d'inconnue n**.
$\Leftrightarrow$ $3n+3 = 1\,437$
$\Leftrightarrow$ $3n = 1\,437-3$
$\Leftrightarrow$ $3n = 1\,434$
$\Leftrightarrow$ $n = \dfrac{1\,434}{3}$
$\Leftrightarrow$ $n = 478$

Donc, les trois entiers consécutifs sont 478 ; 479 et 480. → On peut vérifier que $478+479+480=1\,437$.

2. Je pose $2k+1$, $2k+3$ et $2k+5$ trois entiers impairs consécutifs avec $k \in \mathbb{Z}$.
Alors :
$2k+1+2k+3+2k+5 = 189$ → Équation d'inconnue k.
$\Leftrightarrow$ $6k+9 = 189$
$\Leftrightarrow$ $6k = 189-9$
$\Leftrightarrow$ $6k = 180$

$\Leftrightarrow \ k = \dfrac{180}{6}$

$\Leftrightarrow \ k = 30$

Attention à ne pas tomber dans le piège ! 30 n'est pas impair et c'est normal... Ce n'est pas un de nos entiers...

Donc, les trois entiers impairs consécutifs sont $2 \times 30 + 1 = 61$; 63 et 65. → On peut vérifier que $61 + 63 + 65 = 189$.

3. Je pose $11k$ et $11k + 11$ deux multiples consécutifs de 11 avec $k \in \mathbb{Z}$.

Alors :

$11k + 11k + 11 = 297$

$\Leftrightarrow \ 22k + 11 = 297$

$\Leftrightarrow \ 22k = 297 - 11$

$\Leftrightarrow \ 22k = 286$

$\Leftrightarrow \ k = \dfrac{286}{22}$

$\Leftrightarrow \ k = 13$

Donc, les deux multiples consécutifs sont $11 \times 13 = 143$ et $143 + 11 = 154$. → On peut vérifier que $143 + 154 = 197$.

4. Je pose $7k$, $7k + 7$, $7k + 14$ et $7k + 21$ quatre multiples consécutifs de 7 avec $k \in \mathbb{Z}$.

Alors :

$7k + 7k + 7 + 7k + 14 + 7k + 21 = 686$

$\Leftrightarrow \ 28k + 42 = 686$

$\Leftrightarrow \ 28k = 686 - 42$

$\Leftrightarrow \ 28k = 644$

$\Leftrightarrow \ k = \dfrac{644}{28}$

$\Leftrightarrow \ k = 23$

Donc, les deux multiples consécutifs sont $7 \times 23 = 161$; $161 + 7 = 168$; $168 + 7 = 175$; $175 + 7 = 182$.

---

⑥ **1.**

- Supposons que a est impair.
- Alors il peut s'écrire sous la forme $2k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
  Alors $a^2 = (2k + 1)^2$
  $= 4k^2 + 4k + 1$
  $= 2(2k^2 + 2k) + 1$ avec $2k^2 + 2k \in \mathbb{Z}$
  et donc a^2 est impair : impossible.
- On en déduit que la supposition de départ est absurde.
  Donc a est pair. CQFD.

2.

- Supposons que a est pair.
- Alors il peut s'écrire sous la forme $2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
  Alors $a^2 = (2k)^2$
  $= 4k^2$
  $= 2(2k^2)$ avec $2k^2 \in \mathbb{Z}$
  et donc a^2 est pair : impossible.
- On en déduit que la supposition de départ est absurde.
  Donc a est impair. CQFD.

3.

- Supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel.
- Alors il peut s'écrire sous la forme d'une fraction irréductible $\dfrac{a}{b}$ avec a et b entiers premiers entre eux.

  C'est-à-dire : $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$

  donc $(\sqrt{2})^2 = \left(\dfrac{a}{b}\right)^2$

  donc $2 = \dfrac{a^2}{b^2}$

  donc $2b^2 = a^2$ avec $b^2 \in \mathbb{Z}$
  donc a^2 est pair
  donc, d'après l'exercice **1.**, a est pair aussi
  donc, a peut s'écrire sous la forme $2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$
  donc, $a^2 = (2k)^2$
  donc, $a^2 = 4k^2$
  donc, $2b^2 = 4k^2$
  donc, $b^2 = 2k^2$ avec $k^2 \in \mathbb{Z}$
  donc b^2 est pair
  donc, d'après l'exercice **1.**, b est pair aussi : impossible car a et b entiers premiers entre eux et ne peuvent donc être pairs tous les deux.
- On en déduit que la supposition de départ est absurde.
  Donc $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel. CQFD.