Savoir DÉMONTRER DE L'ARITHMÉTIQUE AVEC DES EXPRESSIONS LITTÉRALES

Ce qu'il faut savoir faire

- **Choisir une expression littérale pour décrire des entiers particuliers**

  Vous devrez commencer un exercice par poser vos expressions littérales (« *Je pose* ... ») :

  - Deux entiers **consécutifs quelconques** s'écrivent n et $n+1$ avec $n \in \mathbb{Z}$.
  - Un nombre **pair** s'écrit $2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
  - Un nombre **impair** s'écrit $2k+1$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
  - **Deux** nombres **pairs consécutifs** s'écrivent $2k$ et $2k+2$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
    Trois nombres **pairs consécutifs** s'écrivent $2k$, $2k+2$ et $2k+4$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
    Etc...
  - **Deux** nombres **impairs consécutifs** s'écrivent $2k+1$ et $2k+3$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
    Trois nombres **impairs consécutifs** s'écrivent $2k+1$, $2k+3$ et $2k+5$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
    Etc...
  - **Deux** nombres **impairs** (non nécessairement consécutifs) s'écrivent $2k+1$ et $2h+1$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $h \in \mathbb{Z}$.
  - Un **multiple de 5** s'écrit $5k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
    Ou, si a **est divisible par 5**, alors on peut écrire $a = 5k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

    De même avec les autres multiples.
  - **Deux multiples consécutifs de 5** s'écrivent $5k$ et $5k+5$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
    Trois multiples consécutifs de 5 s'écrivent $5k$, $5k+5$ et $5k+10$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
    Etc...
  - a **a pour reste** r **dans la division euclidienne par** b si on peut écrire $a = bq + r$ avec $q \in \mathbb{Z}$ et avec $0 \leqslant r < b$.
  - Un nombre à trois chiffres **en base 10** s'écrit $\overline{abc}_{(10)} = 100a + 10b + c$ avec $\begin{cases} a,\ b \text{ et } c \text{ dans } \{0\,;1\,;\dots;9\} \\ a \neq 0 . \end{cases}$

    On peut mettre ainsi autant de chiffres qu'on veut et décomposer suivant les puissances de 10.

- **Démontrer une propriété avec une expression littérale**

  - Si un nombre s'écrit $2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$, alors il est **pair**.
  - Si un nombre s'écrit $2k+1$ avec $k \in \mathbb{Z}$, alors il est **impair**.
  - Si un nombre s'écrit $5k$ avec $k \in \mathbb{Z}$, alors $\begin{cases} \text{il est } \textbf{multiple de 5} \\ \text{ou il est } \textbf{divisible par 5}. \end{cases}$

    De même avec les autres multiples.
  - Si un nombre s'écrit $5q + r$ avec $q \in \mathbb{Z}$ et avec $0 \leqslant q < 5$, alors il a **pour reste** r **dans la division euclidienne par 5**.

  Remarque : Toutes ces expressions s'obtiennent en factorisant (avec un facteur commun).

⚠ Attention, vous devez systématiquement préciser « *avec* $k \in \mathbb{Z}$ »...

En effet, par exemple : 6 n'est pas impair mais on peut l'écrire $2\times2{,}5 + 1$ (avec $2{,}5 \notin \mathbb{Z}$).
17 n'est pas multiple de 5 mais on peut l'écrire $5\times3{,}4$ (avec $3{,}4 \notin \mathbb{Z}$).

---

① Les trois exercices sont indépendants et se traitent tous avec des entiers consécutifs.

1. Démontrer que la somme de trois entiers consécutifs est divisible par 3.

2. Démontrer que la somme de quatre entiers consécutifs est paire.

3. Démontrer que la différence entre les carrés de deux entiers consécutifs est impaire.

② Les deux exercices sont indépendants et se traitent avec des entiers pairs consécutifs.

1. Démontrer que le produit de deux entiers pairs consécutifs est divisible par 4.

2. Démontrer que la somme de trois entiers pairs consécutifs est divisible par 6.

---

③ Les dix exercices sont indépendants et se traitent tous avec des nombres impairs, soit consécutifs, soit non nécessairement consécutifs.

1. Démontrer que la somme de deux entiers impairs consécutifs est divisible par 4.

2. Démontrer que la somme de trois entiers impairs consécutifs est divisible par 3.

3. Démontrer que la somme de quatre entiers impairs consécutifs est divisible par 8.

4. Démontrer que la somme de deux entiers impairs quelconques est paire.

5. Démontrer que la somme de trois entiers impairs quelconques est impaire.

6. Démontrer que le produit de deux entiers impairs quelconques est un nombre impair.

7. Démontrer que le produit de deux entiers impairs consécutifs est un nombre impair.

8. Démontrer que le produit de deux entiers impairs consécutifs a pour reste 3 dans la division euclidienne par 4.

9. Démontrer que le carré d'un entier impair a pour reste 1 dans la division euclidienne par 4.

10. Démontrer que la somme de trois entiers impairs consécutifs a pour reste 3 dans la division euclidienne par 6.

---

④ Les trois exercices sont indépendants et se traitent avec des nombres écrits en base 10.

1. Démontrer que tous les entiers écrits avec trois chiffres identiques sont divisibles par 37.

2. Les entiers 7 227 et 3 883 sont appelés des entiers palindromes car ils se lisent pareil de droite à gauche ou de gauche à droite.
Démontrer qu'un entier palindrome à quatre chiffres est divisible par 11.

3. On considère un nombre entier $N = \overline{abc}_{(10)}$ écrit en base 10.

a) Montrer qu'on peut écrire N sous la forme de la somme d'un multiple de 9 et de la somme des chiffres $a + b + c$.

b) En déduire que si la somme des chiffres de N est multiple de 9, alors N est aussi multiple de 9.

c) Montrer de même que si la somme des chiffres de N est multiple de 3, alors N est aussi multiple de 3.

---

⑤ Les quatre exercices sont indépendants et se traitent en résolvant une équation.

1. Déterminer les trois entiers consécutifs dont la somme vaut 1 437 .

2. Quels sont les trois entiers impairs consécutifs dont la somme vaut 189 ?

3. La somme de deux multiples consécutifs de 11 est égale à 297. Quels sont ces deux multiples ?

4. La somme de quatre multiples consécutifs de 7 est égale à 686. Quels sont ces multiples ?

---

⑥ Les trois exercices sont indépendants et se traitent avec une démonstration par l'absurde (voir Fiche **ALGÈBRE 05**)

1. Démontrer par l'absurde que si a^2 est pair, alors a est pair.

2. Démontrer par l'absurde que si a^2 est impair, alors a est impair.

3. Démontrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel.