Savoir DÉMONTRER AVEC DES COORDONNÉES

Toute la fiche se passe dans un plan muni d'un repère (O, I, J) orthonormé.

Ce qu'il faut toujours savoir faire :

- Calculer des coordonnées de vecteurs (voir Fiche 3)
- Démontrer la nature d'un triangle
  Vous savez depuis longtemps démontrer qu'un triangle est isocèle (voire équilatéral) ou rectangle.
  Ce qui se fait très facilement si sait trouver les longueurs de côtés.
- Démontrer la nature d'un quadrilatère
  Vous savez également depuis longtemps démontrer qu'un quadrilatère est un rectangle, un losange (voire un carré).
  Rappelons tout de même :
  Si un parallélogramme a ses deux diagonales isométriques, alors c'est un rectangle.
  Si un parallélogramme a deux côtés consécutifs isométriques, alors c'est un losange.
  Si un quadrilatère est à la fois rectangle et losange, alors c'est un carré.

Et vous trouverez tout ce qu'il vous faut ci-dessous.

Ce qu'il faut savoir :

- **Les deux formules de calcul de la longueur d'un segment**
  - Si $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$, alors $AB=\sqrt{a^2+b^2}$ (la longueur AB est en fait la norme $\|\overrightarrow{AB}\|$).
  - Si $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$, alors $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.

  En fait, c'est la même formule...

Ce qu'il faut savoir faire :

- **Calculer une longueur de segment $[AB]$**
  - **Méthode 1** : 1) Je calcule d'abord les coordonnées $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ de $\overrightarrow{AB}$.
    2) J'applique la formule $AB=\sqrt{a^2+b^2}$.
    3) Attention, on demande généralement la valeur exacte (donc pas d'arrondi), pensez à simplifier votre racine carrée.
  - **Méthode 2** : J'applique la formule $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.
    Attention à ne pas se mélanger avec les quatre coordonnées...

  Remarque : Vous n'aurez parfois besoin que des carrés (par exemple pour le théorème de Pythagore).
  Il suffit alors de calculer $AB^2=a^2+b^2$ ou $AB^2=(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2$.

- **Démontrer l'égalité de deux vecteurs**
  - **Méthode** : Il suffit de calculer leurs coordonnées et de trouver les mêmes.

  Et deux vecteurs égaux, ça permet de démontrer des parallélogrammes, des milieux...

- **Démontrer la colinéarité de deux vecteurs**
  - **Méthode** : Il suffit de calculer leurs coordonnées et qu'elles soient proportionnelles.
    Avec $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$:
    Sous-méthode 1 : Si le multiplicateur est évident, concluez directement $\vec{v}=\dots\,\vec{u}$.
    Par exemple avec $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\-10\end{pmatrix}$, on peut écrire directement $\vec{v}=2\,\vec{u}$.
    Sous-méthode 2 : Sinon :
    1) Calculez le **déterminant** $a\times d-b\times c$.
    2) Si vous trouvez 0, alors les coordonnées sont proportionnelles et les vecteurs sont colinéaires.
    Sous-méthode 3 : Si a et b non nulles :
    1) Calculez $\dfrac{c}{a}$ et $\dfrac{d}{b}$.
    2) Si vous trouvez deux fois le même nombre k, alors ça veut dire que $\vec{v}=k\,\vec{u}$.

  Et deux vecteurs colinéaires, ça permet de démontrer des parallélismes et des alignements...

Remarques sur les exercices

- L'exercice ① ne demande que des natures de triangles.
- L'exercice ② ne demande que des natures de quadrilatères.
- Les exercices suivants utilisent la colinéarité.
  Mais les trois derniers sont un peu bizarres.

Tous les exercices se placent dans un repère orthonormé (O, I, J) .

---

① **1.** On donne les points $M(-13\,;37)$, $N(47\,;-43)$, $R(17\,;47)$.

a. Calculer les distances MN , MR et NR .

b. Démontrer que MNR est un triangle rectangle.

2. Considérons les points $T(5\,;10)$, $U(12\,;5)$ et $V(10\,;3)$.
Démontrer que TUV est isocèle.

3. Soit les points $E(3\sqrt{3}\,;2)$, $F(-\sqrt{3}\,;0)$, $G(0\,;7)$.
Démontrer que EFG est équilatéral.

4. On donne $D(3\,;7)$, $E(-5\,;4)$ et $F(-2\,;-4)$.
Déterminer la nature du triangle DEF .

---

② **1.** On donne $E(4\,;8)$, $F(6\,;3)$, $G(-9\,;-3)$ et $H(-11\,;2)$.
Démontrer que $EFGH$ est un rectangle.

2. Considérons les points $T(3\,;8)$, $U(3\,;43)$, $V(24\,;15)$ et $W(24\,;-20)$.
Démontrer que $TUVW$ est un losange.

3. Soit les points $K(0{,}03\,;0{,}01)$, $L(0{,}1\,;0{,}02)$, $M(0{,}09\,;0{,}09)$ et $N(0{,}02\,;0{,}08)$.
Quelle est la nature de $KLMN$?

4. On donne $A(3\,;4)$, $B(11\,;12)$, $C(23\,;10)$ et $D(15\,;1)$.
$ABCD$ est-il un losange ?

5. On considère les points $E(-17\,;7)$, $F(0\,;22)$, $G(21\,;13)$ et $H(4\,;-2)$.
$EFGH$ est-il un losange ?

---

③ Dans un repère orthonormé (O, I, J) , soit les points $A(12\,;21)$, $B(-15\,;-24)$, $C(1\,;5)$, $D(-5\,;-5)$, $E(3\,;18)$, $F(-6\,;126)$, $G(-5\,;64)$, $H(0\,;-1)$, $K(-7\,;13)$, $L(-7\,;-1)$, $M(41\,;17)$ et $N(41\,;-12)$.

1. Déterminer si les droites (AB) et (CD) sont parallèles ou non.

2. De même avec (EF) et (GH) .

3. De même avec (KL) et (MN) .

---

④ Dans un repère orthonormé (O, I, J) , on donne les points $R(16\,;-7)$, $S(4\,;25)$, $T(32\,;39)$ et $U(46\,;8)$.
Démontrer que $RSTU$ est un trapèze qui n'est pas un parallélogramme.

---

⑤ Dans un repère orthonormé (O, I, J) , soit les points $A(-12\,;37)$, $G(104\,;8)$, $P(50\,;21{,}5)$ et $S(-76\,;55)$.

1. Démontrer que les trois points A , G et P sont alignés.

2. Les trois points A , G et S sont-ils alignés ?

3. Les trois points A , P et S sont-ils alignés ?

⑥ Dans un repère (O, I, J) orthonormé, on donne les points $M(6\,;0)$, $N(3\,;-2)$ et $R(-6\,;-3)$.
On considère tous les points A_k dont les coordonnées sont de la forme $(3k-3\,;2k-1)$, où $k \in \mathbb{R}$.

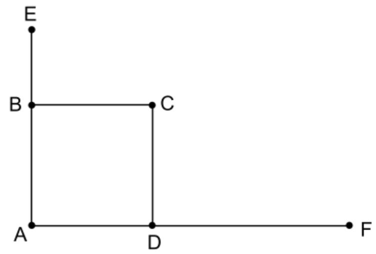
1. Placer un repère orthonormé (O, I, J) en prenant comme unité de longueur 1 grand carreau ou 1 cm (suivant le type de quadrillage de la feuille).

Placer les points M, N, A_1, A_2, A_0 et A_{-1}.

2. Démontrer que, pour toute valeur réelle de k différente de -1, les droites (MN) et (RA_k) sont parallèles.

---

⑦ On donne un carré $ABCD$ de côté 8 cm.
Sur la demi-droite $[AB)$, on place le point E à 5 cm de B.
Sur la demi-droite $[AD)$, on place le point F à 13 cm de D.



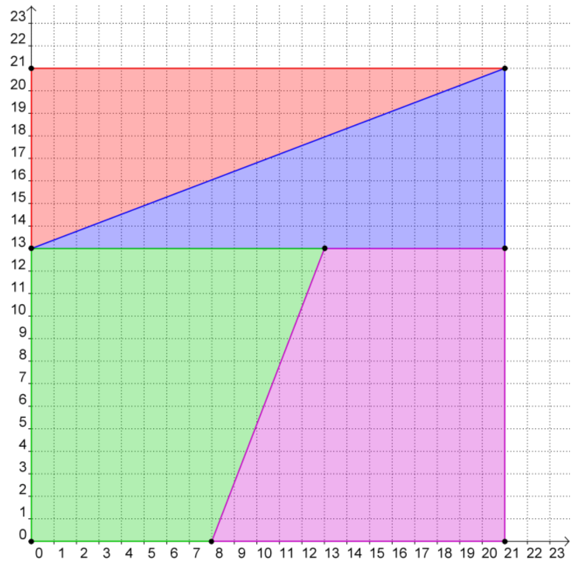
Les points E, C et F sont-ils alignés ?

Indication : Il n'y a pas de repère ni de coordonnées.
Créez vous-mêmes un repère en choisissant une origine, deux axes et une unité sur ces axes.
Puis, trouvez les coordonnées...

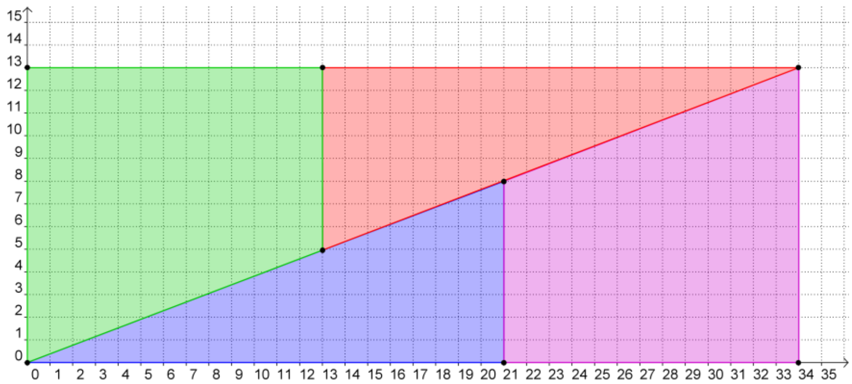
---

⑧ *Voici un très joli exercice de recherche :*

On construit un carré de 21 de côté que l'on partage en quatre morceaux comme sur la figure ci-contre.



On réassemble ces morceaux en un rectangle de 34 sur 13 comme sur la figure ci-contre.



Calculer l'aire du carré et celle du rectangle.
Il y a quelque chose qui ne va pas...
Expliquer ce phénomène...