Savoir FACTORISER

Connaître la signification du verbe

- **Factoriser une somme**, c'est transformer son écriture de **somme** en une écriture de **produit**.

  Exemple : La somme $2a^2 - 11a - 21$ peut s'écrire sous la forme du produit $(2a + 3) \times (a - 7)$.
  Cela signifie que $2a^2 - 11a - 21$ est toujours égal à $(2a + 3) \times (a - 7)$ quelle que soit la valeur de a.

Ce qu'il faut savoir faire

- **Factoriser par mise en facteur**

  - avec un **facteur commun** à 2 termes : $ab + ac = a(b + c)$

  - avec un **facteur commun** à 3 termes : $ab + ac + ad = a(b + c + d)$

  - etc…

  - Pensez à **décomposer** pour découvrir le ou les facteurs communs parfois cachés.
    Par exemple, dans $6x^2 - 9x$, on voit bien le x commun, mais avez-vous vu le 3 commun ?
    Pour ne rien rater, on décompose en $2\times3\times x\times x - 3\times3\times x$ et on voit le $3x$ commun.

  - Une fois le facteur commun mis devant les parenthèses, on écrit dans les parenthèses **ce qui reste** après avoir enlevé le facteur commun.
    Au crayon, on peut barrer le facteur commun : $2\times\cancel{3\times x}\times x - 3\times\cancel{3\times x}$ pour bien voir qu'il reste $2x$ et -3.
    donc la factorisation de $6x^2 - 9x$ est $3x(2x - 3)$.

  - La technique précédente permet de **ne pas oublier un terme** !
    Ainsi, une erreur fréquente est de factoriser $3x^3 + 6x^2 + 3x$ par $3x(x^2 + 2x)$.
    Vous aviez trois termes, il doit y en avoir trois dans les parenthèses.

    On décompose et on barre au crayon : $\cancel{3\times x}\times x\times x + 2\times\cancel{3\times x}\times x + \cancel{3\times x}$
    donc la factorisation de $3x^3 + 6x^2 + 3x$ est $3x(x^2 + 2x$ **+ quelque chose** $)$.

    Bien comprendre ce *quelque chose* : $\cancel{3\times x}\times x\times x + 2\times\cancel{3\times x}\times x + \cancel{3\times x}\times 1$
    donc la factorisation de $3x^3 + 6x^2 + 3x$ est $3x(x^2 + 2x + 1)$.

  - N'ayez pas peur des **gros facteurs communs** !
    Ils ont le mérite de se voir de loin, comme dans $(7x + 2)(5 - 3x) - (7x + 2)(4x + 9)$.

    Mais attention lors de la mise en facteur, gardez bien les parenthèses des termes en **présence d'un –**.
    $\cancel{(7x + 2)}(5 - 3x) - \cancel{(7x + 2)}(4x + 9)$.
    donc la factorisation est $(7x + 2)[(5 - 3x) - (4x + 9)]$.
    Il reste à **réduire** ce qui est entre crochets.

- **Factoriser en appliquant une identité remarquable**

  - la " 1ère identité remarquable " : $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ pour tous réels a et b
  - la " 2ème identité remarquable " : $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ pour tous réels a et b
  - la " 3ème identité remarquable " : $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ pour tous réels a et b

  Remarque : Généralement, les identités remarquables se repèrent facilement avec leurs carrés…
  À condition :
  - de connaître par cœur ses identités remarquables pour les **re**connaître ;
  - de **reconnaître les carrés usuels** 1 , 4 , 9 , 16 , … , 81 , 100 des entiers de 1 à 10
    et même 121 , 144 , 169 , 196 et 225 des entiers de 11 à 15.

Remarque sur les exercices

- Les exercices ① et ② annoncent la technique à utiliser.
- Dans l'exercice ③, c'est à vous de choisir la technique.
- L'exercice ④ est un exemple classique de situation où il faut savoir tricher…
- L'exercice ⑤ est un approfondissement difficile où il faudra plusieurs actions successives pour pouvoir factoriser.

① Factoriser par mise en facteur et, éventuellement, réduire les facteurs obtenus :

$A = 15x^2 + 10x$

$B = 6x^2y - 2xy$

$C = 2x\,(x + 7) - 5\,(x + 7)$

$D = (5a - 1)(3a + 4) + (5a - 1)(10 - a)$

$E = (7x - 6)\,2x - (7x - 6)(1 - 4x)$

$F = 18n^3 - 12n^2 + 15n^5$

$G = (3x - 2)^2 - (8x - 3)(3x - 2)$

$H = (11y - 5)^2 - (11y - 5)$

$I = (6x - 1)(-5x + 2) + (6x - 1)^2 - (x - 3)(6x - 1)$

$J = (3x + 7)(2 - 3x) + 2x\,(3x + 7) - (3x + 7)$

② Factoriser en utilisant les identités remarquables et réduire les expressions suivantes :

$A = 25x^2 + 30x + 9$

$B = 100x^2 - 1$

$C = 4b^2 - 28b + 49$

$D = (3x + 7)^2 - (4x - 3)^2$

$E = (5x - 1)^2 - 25$

$F = 144 - 81y^2$

$G = 1 - (2 - x)^2$

$H = 0{,}25x^2 + x + 1$

$I = m^2 - 22m + 121$

$J = -36x + 81x^2 + 4$

$K = (7x - 11)^2 - (1 - 6x)^2$

$L = 9x^2 - 2$

③ Factoriser et réduire les expressions suivantes :

$A = (3x - 2)(7 - x) - (3x - 2)^2$

$B = (3x - 2)^2 - (10x - 7)^2$

$C = 64x^2 - 16x + 1$

$D = 25x^2 - 4x$

$E = (5x - 4)(2x + 3) - (2x + 3)^2 - (2x + 3)(5 - x)$

$F = (6x - 1)^2 - 100$

$G = 18a^2b^3c - 30a^5b^4c^4 + 6a^3b^7c^2$

$H = (6x - 1)^2 - (8y + 3)^2$

④ **1.** Démontrer que l'expression $25x^2 - 50x + 9$ peut se factoriser sous la forme $(5x - 1)(5x - 9)$.

2. Démontrer que l'expression $2x^3 - 38x + 60$ peut se factoriser sous la forme $(x - 3)(x + 5)(2x - 4)$.

⑤ **1.** Ajouter des parenthèses manquantes pour faire apparaître un facteur commun, puis factoriser :

$A = (7x - 2)(3x + 5) + 7x - 2$

$B = (1 - 11x)(6x - 7) - 6x + 7$

$C = 4a - 2a\,(4a - 3) - 3$

$D = 8x - (13x - 5)(-8x + 1) - 1$

2. Factoriser une première fois avec un facteur commun, puis une deuxième fois avec une identité remarquable :

$A = 9x^3 + 30x^2 + 25x$

$B = 8x^2 - 50$

$C = (8m + 1)^3 - 25\,(8m + 1)$

$D = (9x^2 - 1)(4x - 49) - 5x\,(9x^2 - 1)$

3. Factoriser :

$A = (2x - 1)(3x + 5) + (6x + 10)(3x + 2)$

$B = -7a\,(10a + 30) + (a - 3)(3a + 9)$

$C = (1 + y)(2y - 1) - y^2 + 1$

$D = (3 + 5n)^2 - 25n^2 + 9$

$E = 4x^2 - 28x + 49 - (4x - 24)(6x - 21)$

$F = (9x - 12)^2 - 15x + 20$